10—

Lehrbuch
der
Versicherungsrechnung

Von
Professor Dr. Albrecht Patzig
Privatdozent an der Universität
zu Frankfurt a. M.

Bearbeitet im Anschluß an die Vorlesungen
des Verfassers und unter Berücksichtigung
der wichtigsten Erfordernisse der Praxis.

Erster Teil

1925
Verlag von Wilh. Langguth, Eßlingen a. N.

Satz und Druck:
Buchdruckerei Wilh. Langguth, Eßlingen a. N.

Vorwort.

Wenn auch in Deutschland nicht gerade Mangel herrscht an Lehrbüchern der Versicherungsmathematik, so ist doch bisher noch kein Werk erschienen, das allen Erfordernissen angepaßt wäre. Vor allem fehlte es an einem eigentlichen Lehrbuch der Versicherungsrechnung, an einem Buche, das auch dem mathematisch nicht vorgebildeten Studierenden Gelegenheit gibt, sich mit dem Stoff gründlich vertraut zu machen, und das es nicht zum wenigsten dem im Lebensversicherungsgewerbe tätigen Rechner oder Verwaltungsbeamten ermöglicht, sich ohne vorheriges Hochschulstudium die Kenntnisse zu erwerben, die zum Verständnis der Lebensversicherungstechnik erforderlich sind.

Hier soll das vorliegende Werk Abhilfe schaffen. Es setzt an mathematischen Kenntnissen nur das voraus, was jedem Obersekundaner geläufig sein muß und gibt sogar zur Einleitung eine kurze Darstellung der Grundsätze, die für das Rechnen mit Logarithmen Geltung haben. Das Buch gibt im einzelnen eine sehr eingehende und weitgehende Entwicklung und Darstellung der Formeln des Rechnungswesens, beschränkt sich aber auf das, was in jahrzehntelanger Praxis als vorteilhaft und notwendig erkannt worden ist. Im besonderen ist alles vom Leser ferngehalten, was mehr dem Gebiet der Versicherungsmathematik, weniger dem der Versicherungsrechnung angehört. Aus diesem Grunde ist auch nicht eingegangen auf Fragen wie die der Gewinnbeteiligung, der Rückversicherung, der Einschließung der Invaliditätsgefahr oder der Kriegsgefahr und dergleichen mehr. Darüber muß sich der Studierende oder allgemein der Lernende an anderer Stelle unterrichten. Er soll die Grundzüge des Rechnungswesens verstehen und die wichtigsten allgemeinen Formeln kennen lernen.

Trotzdem dürfte das Buch auch dem Mathematiker willkommen sein. Beim Studium kann es ihm zur Wieder-

holung, im Berufe bisweilen zum Nachschlagen dienen. Ganz besonders dürfte das von der Aufgabensammlung gelten.

Die Aufgabensammlung bietet etwas, das vollständig neu ist. Sie ist wohl in gleicher Weise von Vorteil für den Studierenden, den Seminarleiter und den im Rechnungswesen tätigen Versicherungsbeamten. Alle finden hier, was sie brauchen; und wenn Lehrteil und Aufgabensammlung dazu beitragen, das Studium der Versicherungswissenschaft zu fördern und auch das praktische Arbeiten zu erleichtern, dann hat das vorliegende Werk seinen Zweck erfüllt.

Langen in Hessen, im Oktober 1924

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

1. Kapitel.

Das Rechnen mit Logarithmen.

Der Logarithmus einer Zahl a ist der Exponent, mit dem die Basis b potenziert werden muß, damit sich die Zahl a als Potenzwert ergibt. Wenn also $b^x = a$ ist, so ist $x = \overset{b}{\log} a$.

Für das praktische Rechnen kommt das Logarithmensystem der Basis b = 10 in Betracht. Man nennt dieses System das System der dekadischen oder Briggschen Logarithmen.

Es ergibt sich ohne weiteres die folgende Reihe

10^6	=	1 000 000,	also	log 1 000 000	=	6
10^5	=	100 000,	„	log 100 000	=	5
10^4	=	10 000,	„	log 10 000	=	4
10^3	=	1 000,	„	log 1 000	=	3
10^2	=	100,	„	log 100	=	2
10^1	=	10,	„	log 10	=	1
10^0	=	1,	„	log 1	=	0
10^{-1}	=	0,1,	„	log 0,1	=	−1
10^{-2}	=	0,01,	„	log 0,01	=	−2
10^{-3}	=	0,001,	„	log 0,001	=	−3
			u. s. w.			
$10^{-\infty}$	=	0,	also	log 0	=	$-\infty$.

Die Zahl, von der der Logarithmus gebildet werden soll, bezeichnet man als Numerus.

Liegt der Numerus zwischen zwei einfachen Werten der obigen Tabelle, so muß auch der Logarithmus zwischen den entsprechenden Logarithmen dieser Werte liegen. Liegt also

zum Beispiel der Numerus zwischen den Werten 100 und 1000, so muß der Logarithmus zwischen den Werten 2 und 3 liegen. Beispielsweise ist log 500 = 2,6989700.

Die vor dem Komma stehende Zahl wird dabei als Kennziffer, die hinter dem Komma stehende Zahlenreihe wird als Mantisse bezeichnet.

Die Mantisse kann auf beliebig viel Stellen genau berechnet werden. Für das praktische Rechnen genügen im allgemeinen 5stellige Mantissen; 7stellige Mantissen können schon als recht genau bezeichnet werden.

Die Logarithmen echter Brüche werden im allgemeinen nicht als negative Zahlen, sondern als positive Zahlen mit der zugefügten negativen Kennziffer geschrieben. So ist zum Beispiel log 0,5 = — 0,3010300. Statt dessen schreibt man log 0,5 = 0,6989700 — 1, oder, was für das praktische Rechnen besonders zweckmäßig ist, log 0,5 = 9,6989700 — 10.

Mit dieser Schreibung negativer Zahlen wird erreicht, daß die Mantisse stets unabhängig von der Größenordnung des Numerus bestimmt werden kann. Die Größenordnung des Numerus wird dann durch die hinzugefügte Kennziffer bezeichnet.

So ist zum Beispiel:

$$\begin{aligned}
\log 5000 &= 3{,}6989700 \\
\log 500 &= 2{,}6989700 \\
\log 50 &= 1{,}6989700 \\
\log 5 &= 0{,}6989700 \\
\log 0{,}5 &= 0{,}6989700 - 1 \\
&\text{oder } 9{,}6989700 - 10 \\
\log 0{,}05 &= 0{,}6989700 - 2 \\
&\text{oder } 8{,}6989700 - 10
\end{aligned}$$

u. s. w.

Die Kennziffer bestimmt man nach den folgenden Merkregeln:

1. Ist der Numerus größer als 1, so ist die Kennziffer um 1 geringer als die Anzahl der Stellen, die vor dem Komma stehen.

2. Ist der Numerus kleiner als 1, so ist die negative Kennziffer gleich der Anzahl der Nullen, die vor der ersten Wertziffer des Numerus stehen; die Null vor dem Komma ist dabei mitzuzählen.

Für das Rechnen mit Logarithmen gelten die folgenden Sätze:

1. Man multipliziert zwei Numeri miteinander, indem man die Logarithmen addiert.

2. Man dividiert zwei Numeri miteinander, indem man die Logarithmen subtrahiert.

3. Man potenziert einen Numerus mit einer bestimmten Zahl, indem man den Logarithmus mit dieser Zahl multipliziert.

4. Man radiziert einen Numerus mit einer bestimmten Zahl, indem man den Logarithmus mit dieser Zahl dividiert.

In Buchstaben ausgedrückt ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$1.\ \log (a \cdot b) = \log a + \log b.$$

$$2.\ \log \frac{a}{b} = \log (a : b) = \log a - \log b.$$

$$3.\ \log a^n = n \cdot \log a.$$

$$4.\ \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a$$

Für das Aufschlagen der Logarithmen und für das sogenannte Interpolieren findet man in den Logarithmentafeln die erforderliche Anleitung.

Es ist besonders darauf zu achten, daß der Logarithmus einer Zahl, die potenziert werden soll, entsprechend genauer genommen werden muß als der Logarithmus der sonstigen Zahlen. Wird zum Beispiel mit 5stelligen Logarithmen gerechnet, und ist eine der Zahlen in die 30. Potenz zu erheben, so ist der Logarithmus dieser Zahl mindestens um eine Stelle, besser aber um zwei Stellen genauer zu nehmen als der Logarithmus der übrigen Zahlen.

2. Kapitel.

Das Rechnen mit Zinsen und Zinseszinsen.

Die natürlichste Form des Zinses ist der einfache Zins, der alljährlich, vorschüssig oder nachschüssig, von einem Kapital erhoben oder dafür vergütet wird.

Die Formeln des einfachen Zinses sind enthalten in der Gleichung

$$(1) \qquad z = \frac{c \cdot p \cdot t}{100} .$$

Dabei bedeutet z den Zinsbetrag, c das Kapital, p den Zinssatz (Zinsfuß, Prozentsatz), zu dem das Kapital ausgeliehen wird, und t die Zeit, für die der Zinsbetrag zu berechnen ist.

Die obige Formel wird im allgemeinen nur dann angewendet, wenn es sich nicht um lange Zeiträume handelt.

In der Lebensversicherung rechnet man bei Rechnungsarten, die eine dauernde Verzinsung zur Voraussetzung haben, nicht mit einfachem Zins, sondern mit Zinsen und Zinseszinsen. Es sei i der Zins, den das Kapital 1 im Laufe eines Jahres hervorbringt, also der Jahreszins der Einheit. Das Kapital 1 verzinst sich dann im Laufe des Jahres auf den Betrag $q = (1 + i)$.

Dieser Wert wird als Zinsfaktor bezeichnet.

Nach einem Jahre hat das aufgezinste Kapital also den Wert $k_1 = (1 + i) \cdot k_0 = q \cdot k_0$, wenn mit k_0 das Anfangskapital bezeichnet wird. Wird dann das Kapital k_1 wieder ein Jahr hindurch aufgezinst, so ergibt sich

$$k_2 = (1 + i) \cdot k_1 = (1 + i)^2 \cdot k_0 = q^2 k_0 .$$

Setzt man die Verzinsung in dieser Weise fort, so erhält man als Formel für das Endkapital, das nach n Jahren vorhanden ist, die Gleichung

$$(2) \qquad k_n = (1 + i)^n \cdot k_0 = q^n \cdot k_0 .$$

Daraus folgt zunächst durch Umkehrung die Formel für das Anfangskapital

$$(3^{\underline{a}})\qquad k_0 = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot k_n = \left[\frac{1}{1+i}\right]^n \cdot k_n \,.$$

Man schreibt zur Abkürzung

$$\frac{1}{1+i} = v$$

und bezeichnet v als den Abzinsungs- oder Diskontierungsfaktor im Gegensatz zu dem Aufzinsungs- oder Zinsfaktor $(1+i)$. Es ist also v der Betrag, der sofort eingelegt werden muß, wenn das Kapital 1 nach einem Jahre vorhanden sein soll; ebenso ist dann v^n der Betrag, der eingelegt werden muß, wenn nach n Jahren das Kapital 1 vorhanden sein soll. Die Formel für das Anfangskapital lautet nun

$$(3^{\underline{b}})\qquad k_0 = v^n \cdot k_n \,.$$

Aus der Formel (2) folgt weiter

$$(1+i)^n = \frac{k_n}{k_0}\,, \qquad \text{also}$$

$$(4)\qquad i = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} - 1 \,.$$

Nach dieser Formel wird der Zinssatz berechnet, wenn das Anfangskapital und das Endkapital gegeben ist.

Ist nach der Dauer der Verzinsung gefragt, so hat man $(1+i)^n = \frac{k_n}{k_0}$ zu logarithmieren. Man erhält dann:

$$n \cdot \log\,(1+i) = \log k_n - \log k_0 \,, \qquad \text{also}$$

$$(5)\qquad n = \frac{\log k_n - \log k_0}{\log\,(1+i)} \,.$$

Führt man nach dieser Formel eine Berechnung aus, so darf man bei logarithmischer Berechnung nicht übersehen, daß man $(1+i)$ doppelt zu logarithmieren hat. Im

Zähler hat man den Logarithmus von der Differenz zweier Logarithmen aufzuschlagen.

Die bisher gegebenen Formeln gelten für die einmalige Einzahlung eines Kapitals. Es können auch regelmäßig wiederkehrende Zahlungen geleistet werden.

Die Summenwerte periodischer Zahlungen, gleichviel ob es sich um Anfangs- oder um Endwerte handelt, bezeichnet man als Zeitrentenwerte.

Wird zu Anfang eines jeden Jahres die Einlage e gezahlt, so ist vorhanden:

zu Anfang das Kapital $c_0 = e$,
nach 1 Jahre das Kapital $c_1 = e \cdot (1+i)$,
nach 2 Jahren das Kapital $c_2 = e \cdot (1+i)^2 + e\,(1+i)$,
u. s. w.

Für den Schluß des n-ten Jahres erhält man dann, wenn man für den Zinsfaktor die einfachere Form q schreibt,

$$c_n = e \cdot q^n + e \cdot q^{n-1} + e \cdot q^{n-2} + \ldots\ldots + e \cdot q^2 + e \cdot q,$$

woraus sich mit Hilfe der bekannten Formel für die Summe einer geometrischen Reihe ohne weiteres ergibt:

$$(6\underline{^a}) \qquad c_n = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot e.$$

Für die Einheit der Einlage ($e = 1$) erhält man den sogenannten Rentenendwert

$$(6\underline{^b}) \qquad r_{\overline{n|}} = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

Die Formel gilt für die vorschüssige Zahlung der Einlage 1. Die nachschüssige Zahlung kommt bei dieser Form des Rentenwertes fast niemals vor. Die Formel würde sich bei nachschüssiger Zahlung in der Weise ändern, daß rechts der Faktor q wegfiele.

Die vollständige Formel ($6\underline{^a}$) führt in der Umkehrung zu dem Ausdruck

$$(7) \qquad e = \frac{q - 1}{q\,(q^n - 1)} \cdot c_n = \frac{i}{q\,(q^n - 1)} \cdot c_n .$$

Diese Formel ist anzuwenden, wenn nach der Einlage gefragt ist.

Auf die Frage nach der Höhe des Zinssatzes gibt die Grundformel keine Auskunft, da die Umkehrung nicht zu einer auf einfachem Wege lösbaren Gleichung führt. Ist nach dem Zinssatz gefragt, so muß man sich eines Näherungsverfahrens bedienen.

Man rechnet mit einem näherungsweise, aber doch schon möglichst genau abgeschätzten Zinssatz i' und erhält damit einen bestimmten Wert c'_n, der von dem gegebenen Wert c_n noch etwas abweicht. Man wählt dann weiter einen zweiten Zinssatz i''; und zwar nimmt man hier zum Beispiel $i'' < i'$, wenn $c'_n > c_n$, anderseits aber $i'' > i'$, wenn $c'_n < c_n$ ausgefallen ist. Hat man die Werte i' und i'' geschickt ausgewählt, so wird c_n zwischen den Werten c'_n und c''_n liegen. Andernfalls muß man den einen Zinssatz entsprechend abändern, bis die Bedingung erfüllt ist. Es muß dann sein $i = i' + \Delta i$, wobei angenommen ist, es sei $i' < i''$. Setzt man dann

$$i'' - i' = \delta,$$
$$c''_n - c'_n = D,$$
$$c_n - c'_n = d,$$

so erhält man bei linearer Interpolation die Proportion

$$D : d = \delta : \Delta i,$$ also

$$\Delta i = \frac{d}{D} \cdot \delta \tag{8a}$$

und mithin den interpolierten Zinssatz

$$i = i' + \frac{d}{D} \cdot \delta . \tag{8b}$$

Ist nach der Zeit gefragt, so ergibt sich aus der Formel (6a) $e \cdot q^{n+1} = c_n \cdot (q-1) + e \cdot q$, und somit aus einigen Umformungen, wobei wieder $q = (1+i)$ und $(q-1) = i$ gesetzt werden mag,

$$(9^{\underline{a}})\qquad n = \frac{\log\left[i c_n + (1+i)\,e\right] - \log\left[(1+i)\,e\right]}{\log(1+i)}\,.$$

Wird dabei die Einlage gleich der Einheit, also $e = 1$ gesetzt, so erhält man

$$(9^{\underline{b}})\qquad n = \frac{\log\left[i\, r_{\overline{n|}} + (1+i)\right] - \log(1+i)}{\log(1+i)}\,.$$

Die periodischen Einlagen können anstatt zum Aufbau eines Kapitals auch zur Abtragung eines solchen, also zur Tilgung einer Schuld verwendet werden. Die dabei anzuwendenden Formeln werden unter dem Sammelnamen der Amortisationsrechnung zusammengefaßt. Die Einlage e wird dann als Tilgungsquote bezeichnet. Das abzutragende Kapital sei c (ohne Index).

Die Tilgungsquoten werden zu Beginn eines jeden Jahres entrichtet. Es ist dann also noch vorhanden
zu Anfang des 1. Jahres die Schuld $(c - e)$,
am Schlusse des 1. Jahres die Schuld $(c - e)\cdot q$,
zu Anfang des 2. Jahres die Schuld $cq - eq - e$,
zu Anfang des 3. Jahres die Schuld $cq^2 - eq^2 - eq - e$,
zu Anfang des 4. Jahres die Schuld $cq^3 - eq^3 - eq^2 - eq - e$
u. s. w.

Als Schuldwert am Anfange des n-ten Jahres ergibt sich somit der Betrag

$$cq^{n-1} - eq^{n-1} - eq^{n-2} - eq^{n-3} - \ldots\ldots - eq - e.$$

Mit der letzten Tilgungsquote soll die Schuld völlig abgetragen werden. Der obige Ausdruck muß dann also zu null werden. Es ergibt sich somit die Grundformel

$$(10^{\underline{a}})\qquad c\cdot q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}\cdot e = \frac{q^n - 1}{i}\,e\,.$$

Gewöhnlich wird nach der Tilgungsquote gefragt. Dafür ergibt sich

$$(10^{\underline{b}})\qquad e = \frac{i\cdot q^{n-1}}{q^n - 1}\cdot c\,.$$

Anmerkung: Bei der Anwendung von Formeln dieser Art ist sorgfältig zu unterscheiden zwischen den Ausdrücken

$$q^{n-1} \text{ und } (q^n - 1).$$

Aus der Umkehrung der Formel ($10^{\underline{b}}$) ergibt sich dann

$$c = \frac{q^n - 1}{i \cdot q^{n-1}} \cdot e, \tag{11}$$

eine Formel, die wohl nur selten vorkommen wird.

Ist nach dem Zinssatz gefragt, so muß wieder zu einem Näherungsverfahren gegriffen werden. Die Methode ist dieselbe wie bei der Bestimmung des Zinssatzes aus dem Anfangskapital und dem Endkapital (Formeln 8).

Ist nach der Zeit gefragt, so ergibt sich aus der Formel ($10^{\underline{a}}$) nach einigen Umformungen,* wobei zum Schluß wieder $q = (1 + i)$ und $(q - 1) = i$ gesetzt wird

$$n = \frac{\log (1 + i)\, e - \log [(1 + i)\, e - ic]}{\log (1 + i)}. \tag{$12^{\underline{a}}$}$$

Dieser Formel kann leicht eine gefälligere Form gegeben werden. Wenn nämlich i der Jahreszins der Einheit ist, also der Betrag, der für das Kapital 1 am Ende des Jahres als Zins zu vergüten ist, so kann dieser nachschüssige Zins der Einheit durch Diskontierung in den vorschüssigen Zins der Einheit verwandelt werden. Diesen vorschüssigen Zins der Einheit bezeichnet man mit d. Es ist also

$$d = \frac{i}{1 + i} = v \cdot i = \frac{i}{q}.$$

Dieser diskontierte Zins der Einheit ist ein besonders in der Versicherungsrechnung häufig vorkommender, sehr wichtiger Begriff.

* Man hat in der Formel ($10^{\underline{a}}$) zunächst den Nenner der rechten Seite auf die linke Seite zu bringen, dann die Gleichung mit q^n zu dividieren, die Glieder so zu ordnen, daß q^n nur auf der linken Seite steht und endlich zu logarithmieren.

Aus der Gleichung (10a) ergibt sich nun

$$\frac{e}{q^n} = e - \frac{i}{q} \cdot c = e - dc.$$

Es ist dann also

$$(12b) \qquad n = \frac{\log e - \log (e - dc)}{\log (1 + i)}.$$

Der Ausdruck $(e - dc)$ darf nicht negativ werden, da Logarithmen negativer Zahlen in der praktischen Rechnung keinen Sinn haben. Es muß also sein $e > dc$. Diese Bedingung besagt, daß die Tilgungsquote größer sein muß als der auf den Beginn des Jahres diskontierte Zins des Schuldbetrages, was selbstverständlich der Fall sein muß, weil die Schuld sonst steigen würde, also niemals den Wert null erreichen könnte. Ist gerade $e = dc$, so wird

$$\log (e - dc) = - \infty, \text{ also } n = + \infty.$$

Auch das versteht sich von selbst; denn wenn die Tilgungsquote nur gerade so groß ist wie der auf den Anfang des Jahres diskontierte Zins des Schuldbetrages, dann findet keine Abtragung statt, sodaß dann die Schuld in endlicher Zeit überhaupt nicht getilgt werden kann.

Statt der gleichbleibenden können auch veränderliche Einlagen oder Tilgungsquoten gezahlt werden. Die Entwicklung der Formel ist dann etwas umständlicher; doch ist es sehr wichtig, diese Art der Entwicklung kennen zu lernen.

Es sei e die Einlage des ersten Jahres. Die zweite Einlage sei um einen bestimmten Satz höher als die erste, die dritte Einlage sei um das Doppelte das Satzes höher als die erste Einlage usw. Der Steigerungssatz wird mit ε bezeichnet. Es ist dann also die erste Einlage e, die zweite Einlage $(1 + \varepsilon) \cdot e$, die dritte Einlage $(1 + 2\varepsilon) \cdot e$ usw., die n-te Einlage mithin $(1 + \overline{n-1}\,\varepsilon) \cdot e$. Es ergeben sich dann die folgenden Werte des Endkapitals:

$$c_0 = e\,,$$

Ende des 1. Jahres $c_1 = eq\,,$

Ende des 2. Jahres $c_2 = eq^2 + (1 + \varepsilon)\,eq\,,$

$$c_3 = eq^3 + (1 + \varepsilon) \cdot eq^2 + (1 + 2\varepsilon) \cdot eq\,,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = eq^n + (1 + \varepsilon) \cdot eq^{n-1} + (1 + 2\varepsilon) \cdot eq^{n-2} + \ldots\ldots + \left(1 + \overline{n-1}\;\varepsilon\right) \cdot eq\,.$$

Die Reihe läßt sich in zwei Teilen darstellen. Schreibt man

$$c_n = (S_1 + \varepsilon \cdot S_2) \cdot e,$$

so ist

$$S_1 = q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots\ldots + q = q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\,.$$

Die zweite Reihe läßt sich leicht summieren, wenn man die Glieder anders zusammenstellt. Man schreibt:

$$S_2 = q^{n-1} + 2q^{n-2} + 3q^{n-3} + \ldots\ldots + (n-1)\,q\,,$$

$$\begin{aligned}
S_2 = q^{n-1} &+ q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots\ldots + q \\
&+ q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots\ldots + q \\
&\phantom{+ q^{n-2} +{}} q^{n-3} + \ldots\ldots + q \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\phantom{+ q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots\ldots} + q.
\end{aligned}$$

Die Reihe muß von links nach rechts ebensoviel Summanden aufweisen wie von oben nach unten; es sind also im ganzen (n—1) Einzelreihen vorhanden. Summiert man diese Einzelreihen von links nach rechts, so erhält man:

$$\begin{aligned}
S_2 &= q \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = \frac{1}{d}\left[q^{n-1} - 1\right] \\
&+ q \cdot \frac{q^{n-2} - 1}{q - 1} = \frac{1}{d}\left[q^{n-2} - 1\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ q \cdot \frac{q - 1}{q - 1} = \frac{1}{d}\left[q - 1\right].
\end{aligned}$$

Also ist:

$$d \cdot S_2 = \begin{array}{l} (q^{n-1} - 1) \\ + (q^{n-2} - 1) \\ + (q^{n-3} - 1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ + (q - 1). \end{array}$$

Um der Formel eine gefälligere Form zu geben, fügt man zu der rechts stehenden Summe noch den Ausdruck (1—1) hinzu. Man hat dann also:

$$d \cdot S_2 = \frac{q^n - 1}{q - 1} - n.$$

Es ergibt sich somit schließlich die Formel:

$$(13\underline{^a}) \quad c_n^< = \frac{1}{d}\left[(q^n - 1) + \varepsilon\left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - n\right)\right] \cdot e^<$$

oder in anderer Bezeichnungsweise:

$$c_n^< = \left[r_{\overline{n}|} + \frac{\varepsilon}{i}(r_{\overline{n}|} - qn)\right] e^< .$$

Dabei ist $e^<$ die erste Einlage, und mit dem Symbol $<$ wird ausgedrückt, daß das Kapital aus steigenden (größer werdenden) Einlagen gebildet wird. Nehmen die Einlagen ab, so ist entsprechend:

$$(13\underline{^b}) \quad c_n^> = \frac{1}{d}\left[(q^n - 1) - \varepsilon\left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - n\right)\right] \cdot e^>$$

oder in anderer Bezeichnungsweise:

$$c_n^> = \left[r_{\overline{n}|} - \frac{\varepsilon}{i}(r_{\overline{n}|} - qn)\right] e^> .$$

Auch für die Abtragung des Kapitals, also für die Tilgung einer Schuld, können veränderliche Einlagen (Tilgungsquoten) in Frage kommen. Da die Schuld nicht am Ende, sondern am Anfang eines Jahres, nämlich mit der Zahlung der letzten Tilgungsquote verschwindet, so muß in der Formel sinngemäß statt des Faktors $\frac{1}{d} = \frac{1+i}{i}$ der

Faktor $\frac{1}{i}$ eintreten. Die Formel ist im übrigen der Formel (13) analog gebildet; sie lautet:

$$\begin{matrix}(14^{\underline{a}})\\(14^{\underline{b}})\end{matrix}\quad q^{n-1}\cdot c = \frac{1}{i}\left[(q^n-1) \pm \varepsilon\left(\frac{q^n-1}{q-1}-n\right)\right]\cdot e^{\lesseqgtr},$$

wofür man nach Multiplikation mit q auch schreiben kann:

$$q^n\cdot c = \left[r_{\overline{n|}} \pm \frac{\varepsilon}{i}\,(r_{\overline{n|}} - qn)\right] e^{\lesseqgtr}.$$

Die Veränderung einer periodischen Einlage kann selbstverständlich auch in einer anderen als der hier angegebenen Form vor sich gehen. Es muß dann für jeden einzelnen Fall eine besondere Formel aufgestellt werden.

3. Kapitel.

Barwerte und Endwerte.

In der Versicherungsrechnung pflegt man alle Werte zunächst für die Einheit der auszuzahlenden Summe zu berechnen. Es nehmen dann einige der im zweiten Kapitel gegebenen Formeln eine besondere Form an. Im wesentlichen kommen hier die folgenden Formen in Betracht:

1. Das Kapital 1 wächst im Laufe von n Jahren durch Verzinsung auf den Wert $(1+i)^n$ an. (Summenendwert.)

2. Das Kapital 1, das erst nach n Jahren fällig ist, hat gegenwärtig den Wert $v^n = \left[\frac{1}{1+i}\right]^n$ (Summenbarwert).

3. Wenn zu Anfang eines jeden Jahres die Einlage 1 gezahlt wird, so ergibt sich nach n Jahren das Endkapital: $r_{\overline{n|}} = q\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$ (Rentenendwert).

4. Umgekehrt kann auch danach gefragt sein, welchen gegenwärtigen Wert eine Rente aufweist, die n Jahre hindurch im Betrage der Einheit auszuzahlen ist. Man hat es dann mit einem Rentenbarwert zu tun.

Der Rentenbarwert ist ausgedrückt durch die Reihe:

$$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots + v^{n-1},$$

wenn die Renten n Jahre hindurch vorschüssig, also am Anfang eines jeden Jahres, gezahlt werden sollen.

Schreibt man den Barwert als Summe einer geometrischen Reihe, so ergibt sich:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{1-v}\,. \tag{15a}$$

Dieser Formel kann auch eine andere Fassung gegeben werden. Zunächst ist:

$$(1-v) = \left(1 - \frac{1}{1+i}\right) = d\,,$$

also

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d}\,. \tag{15b}$$

Es besteht aber auch eine sehr einfache Beziehung zwischen dem Rentenbarwert und dem Rentenendwert. Denn aus der Formel (15a) folgt ohne weiteres:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{1 - \frac{1}{(1+i)}} = \frac{1 - \frac{1}{q^n}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{q\,(q^n - 1)}{q^n\,(q-1)}\,.$$

Also ist:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{q\,(q^n - 1)}{(q-1)} : q^n = r_{\overline{n}|} : q^n\,,$$

$$a_{\overline{n}|} = r_{\overline{n}|} \cdot v^n\,, \tag{15c}$$

$$r_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} \cdot (1+i)^n = \frac{a_{\overline{n}|}}{v^n}\,, \tag{15d}$$

(15$\underline{\text{e}}$) $$\frac{r_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} = (1+i)^n ,$$

(15$\underline{\text{f}}$) $$\frac{a_{\overline{n}|}}{r_{\overline{n}|}} = v^n .$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen zwischen dem Rentenbarwert und dem Rentenendwert läßt sich oft die Rechnung erheblich einfacher gestalten, zumal wenn man für alle Dauern tabellarische Zusammenstellungen zur Hand hat. Verfügt man zum Beispiel nur über eine Zusammenstellung der Barwerte, so kann man sich die entsprechenden Endwerte mit Hilfe der hier gegebenen Beziehungsgleichungen leicht verschaffen. Auch kann man den Formeln oft eine bequemere Fassung geben. So kann man zum Beispiel aus der Formel (10$\underline{\text{a}}$) die folgenden einfacheren Formeln herleiten:

$$c\,q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot e ,$$

$$c\,q^n = q \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot e = r_{\overline{n}|} \cdot e ,$$

(10$\underline{\text{c}}$) $$c = \frac{r_{\overline{n}|}}{q^n} \cdot e = a_{\overline{n}|} \cdot e ,$$

(10$\underline{\text{d}}$) $$e = \frac{c}{a_{\overline{n}|}} .$$

Die Formel (10$\underline{\text{c}}$) läßt sich auch logisch begründen. Wenn die Tilgung beginnt, so weist die Schuld den Gegenwartswert c auf. Damit sie im Zeitraum von n Jahren getilgt werden kann, muß offenbar der Gegenwartswert aller Tilgungsquoten dem Gegenwartswert der Schuld gleich sein. Der Gegenwartswert einer n Jahre hindurch im Betrage der Einheit zu zahlenden Quote ist aber ausgedrückt durch den Rentenbarwert $a_{\overline{n}|}$; also ist der Gegenwartswert aller im Betrage e zu zahlenden Tilgungsquoten ausgedrückt durch $a_{\overline{n}|} \cdot e$. Es muß somit sein $c = a_{\overline{n}|} \cdot e$.

Die Formel ($15^{\underline{a}}$) gilt unter der Voraussetzung, daß die Rente 1 vorschüssig gezahlt werden soll. Soll sie nachschüssig gezahlt werden, so ergibt sich die Formel:

$$(16) \qquad a_{\overline{n}|} = v \cdot \frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i} \; .$$

Diese Formel hat nur wenig Bedeutung, da es sich im allgemeinen um vorschüssig zu zahlende Renten handeln wird.

Im übrigen sei hervorgehoben, daß man den Barwert der vorschüssig zu zahlenden Rente von dem Barwert der nachschüssig zu zahlenden Rente auch äußerlich durch die Verschiedenheit des Symbols unterscheidet. Es bedeutet:

a den Barwert der vorschüssig zu zahlenden Rente 1,
a den Barwert der nachschüssig zu zahlenden Rente 1.

Die Diskussion der Formel ($10^{\underline{c}}$) gibt zum ersten Male Gelegenheit, auf die in der Versicherungsrechnung so wichtige Grundforderung der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung zu sprechen zu kommen. Der gegenwärtige Wert der Schuld muß gleich sein dem gegenwärtigen Wert aller Tilgungsquoten. Dann und nur dann kann die Schuld in der festgesetzten Zeit getilgt werden. Es ist dabei wichtig, zu beachten, daß die Gleichheit von Leistung und Gegenleistung für denselben Zeitpunkt Geltung haben muß. So könnte man zum Beispiel anstatt für den Beginn der Tilgung auch für das Ende der Tilgungsdauer die Gleichheit beider Werte fordern. Man wird dann zweckmäßig für den Schluß des n-ten Jahres die Berechnung vornehmen. Die Schuld c, n Jahre hindurch aufgezinst, wächst an zu dem Betrage $c \cdot q^n$; die Tilgungsquoten e, n Jahre hindurch angesammelt und aufgezinst, wachsen an zu dem Betrage $r_{\overline{n}|} \cdot e$. Es muß also sein $c\,q^n = r_{\overline{n}|} \cdot e$, was sich ja bei der Entwicklung der Formel ($10^{\underline{c}}$) tatsächlich ergeben hat.

Namentlich ist es der Rentenendwert $r_{\overline{n}|}$, der in tabellarischer Zusammenstellung sehr wertvoll ist, weil sich viel damit vereinfachen läßt. Die Formeln (13) und (14) zum

Beispiel erhalten mit Hilfe des Rentenendwertes die folgende gefällige Form:

$$(13^{c})\qquad c_n^{\lesseqgtr} = \left[r_{\overline{n}|} \pm \frac{\varepsilon}{i}\left(r_{\overline{n}|} - q\cdot n\right)\right]\cdot e^{\lesseqgtr},$$

$$(14^{c})\qquad q^n\cdot c = \left[r_{\overline{n}|} \pm \frac{\varepsilon}{i}\left(r_{\overline{n}|} - q\cdot n\right)\right]\cdot e^{\lesseqgtr}.$$

Daß hier in beiden Formeln die rechte Seite der Gleichung dieselbe sein muß, leuchtet ohne weiteres ein. Denn in der Formel (14^{c}) kommt wieder der Satz von der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung zum Ausdruck, wobei die Gegenleistung durch einen Endwert steigender oder fallender Einlagen ausgedrückt werden muß.

Soll übrigens die Gleichung (14^{c}) nach c hin explicite ausgedrückt werden, so kann das mit Hilfe der Beziehungsgleichungen (15) leicht geschehen. Es ergibt sich nämlich:

$$(14^{d})\qquad c = \left[a_{\overline{n}|} \pm \frac{\varepsilon}{i}\left(a_n - v^{n-1}\cdot n\right)\right]\cdot e^{\lesseqgtr}.$$

In dieser Formel ist also der Rentenbarwert verwendet, nicht der Rentenendwert.

4. Kapitel.

Die Sparversicherung.

Es gibt eine Versicherungsform, die weniger in technischer Hinsicht, wohl aber in wirtschaftlicher Hinsicht als Versicherung bezeichnet werden kann: die Sparversicherung. Diese Versicherung wird vielfach als Ausstattungs- oder Aussteuerversicherung angewendet; bisweilen dient sie auch als einstweiliger Ersatz für eine regelrechte Versicherung, wenn die zu versichernde Person zunächst in die Todesfallversicherung nicht aufgenommen werden kann.

Die Sparversicherung wird gewöhnlich in der Weise abgeschlossen, daß die Versicherungssumme nach n Jahren fällig wird, und daß, wenn die versicherte Person vorher sterben sollte, das alsdann vorhandene Nettoguthaben ausgezahlt wird.

Die Versicherung kann zu einer einmaligen Einlage oder zu laufenden Einlagen (Jahresprämien) abgeschlossen werden.

Wird eine einmalige Einlage gezahlt, so gilt für die mathematische einmalige Prämie die Formel:

$$A_{\overline{n}|} = v^n \ . \tag{17}$$

Es sei dabei erwähnt, daß man in der Versicherungsrechnung mit dem Buchstaben A stets eine einmalige Prämie, und zwar eine einmalige Nettoprämie bezeichnet. Nettoprämie nennt man die Prämie, die nur die aus der Versicherung selbst herrührenden Verpflichtungen der Gesellschaft deckt. Man bezeichnet eine solche Prämie auch als mathematische Prämie.

Die einmalige Nettoprämie drückt den gegenwärtigen Wert der von der Gesellschaft übernommenen Verpflichtungen aus. Man bezeichnet die einmalige Nettoprämie daher auch als den Barwert der Versicherung.

Wird die Sparversicherung zu laufenden Einlagen (laufenden Prämien) abgeschlossen, so geschieht das meist in der Weise, daß die Dauer der Prämienzahlung mit der Versicherungsdauer zusammenfällt, daß also im ganzen n Prämien eingezahlt werden, die rechnungsmäßig am Anfang eines jeden Jahres zu entrichten sind.

Zur Bestimmung der laufenden Prämie ist die Formel ($6^{\underline{a}}$) anzuwenden, wobei $c_n = 1$ zu setzen ist, und wobei die Nettojahresprämie mit dem in der Formel enthaltenen Symbol e gleichbedeutend ist.

Die Nettojahresprämie wird in der Versicherungsrechnung mit P bezeichnet.

Bezeichnet man die laufende Einlage für die Sparversicherung mit $P_{\overline{n}|}$, so ist:

$$q \cdot \left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \cdot P_{\overline{n}|} = 1 = r_{\overline{n}|} \cdot P_{\overline{n}|} \,,$$

(18a)
$$P_{\overline{n}|} = \frac{1}{r_{\overline{n}|}} \,.$$

Obwohl diese Formel sehr einfach ist, wird sie doch in der Praxis gewöhnlich nicht anwendet. In der Praxis zieht man es vielmehr vor, Nettojahresprämien, wenn irgend möglich, durch Barwerte auszudrücken. Aus den Formeln (15) folgt nun:

$$\frac{1}{r_{\overline{n}|}} = \frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} \,.$$

Also ist:

(18b)
$$P_{\overline{n}|} = \frac{v^n}{a_{\overline{n}|}} = \frac{A_{\overline{n}|}}{a_{\overline{n}|}} \,.$$

Die Nettojahresprämie ist also ausgedrückt durch das Verhältnis des Barwertes der Versicherung und des Barwertes der Rente 1.

Wird, was hie und da vorkommt, die Dauer der Prämienzahlung kürzer bemessen als die Dauer der Versicherung, wird also bestimmt, daß die Summe 1 nach n Jahren fällig werden soll, daß aber Einlagen dafür nur t Jahre hindurch eingezahlt werden sollen, wobei $t < n$ sein muß, so spricht man von einer verstärkt abgekürzten Prämienzahlungsdauer. Man kann die nur t Jahre hindurch zu zahlende Prämie, die man zweckmäßig mit ${}_tP_{\overline{n}|}$ bezeichnet, leicht berechnen, wenn man die Summe 1 zunächst bis zum Schlusse des letzten Jahres der Prämienzahlung diskontiert. Die Summe 1 hat für diesen Zeitpunkt nur den Wert v^{n-t}. Dieser Wert muß durch die t Jahre hindurch geleisteten Einlagen aufgebaut werden. Es muß also sein:

$$v^{n-t} = {}_tP_{\overline{n}|} \cdot q\left(\frac{q^t - 1}{q - 1}\right) = {}_tP_{\overline{n}|} \cdot r_{\overline{t}|} \,,$$

und es ergibt sich mithin:

(19a)
$${}_tP_{\overline{n}|} = \frac{v^{n-t}}{r_{\overline{t}|}} \,.$$

Hier empfiehlt es sich besonders, mit Hilfe der Beziehungsgleichung (15$\underline{\text{f}}$) die rechte Seite umzuformen. Man erhält dann:

$$_{t}P_{\overline{n}|} = \frac{v^{n-t} \cdot v^{t}}{a_{\overline{t}|}} \,,$$

(19$\underline{\text{b}}$)
$$_{t}P_{\overline{n}|} = \frac{v^{n}}{a_{\overline{t}|}} = \frac{A_{\overline{n}|}}{a_{\overline{t}|}} \,.$$

Auch hier ist die Nettoprämie durch das Verhältnis zweier Barwerte ausgedrückt. Im Zähler steht der Barwert der Versicherung, im Nenner der Barwert der t Jahre hindurch zu zahlenden Rente 1.

Die vom Versicherungsnehmer tatsächlich zu zahlenden Prämien enthalten noch einen Aufschlag zur Deckung der Verwaltungskosten; doch muß dieser Aufschlag sehr niedrig gehalten werden, damit der wirtschaftliche Zweck der Versicherung nicht beeinträchtigt wird. Wenn mit einem Zinssatz von 3½ % gerechnet wird, so sollte der Aufschlag höchstens etwa 5 % der Prämie ausmachen. Wird eine einmalige Einlage gezahlt, so ist selbst dieser Aufschlag noch zu hoch.

Von der Bemessung der Aufschläge wird an anderer Stelle noch die Rede sein.

Sehr wichtig ist die Frage, was die Versicherungsanstalt am Ende eines jeden Jahres für die einzelne Versicherung zurückzustellen hat.

Da die Einlagen nur der Verzinsung unterliegen, so ist die Frage leicht zu beantworten.

Ist die Versicherung zur einmaligen Einlage abgeschlossen, so hat sich der Barwert nach m Jahren erhöht auf den Betrag:

$$A_{\overline{n}|}(1+i)^{m} = v^{n}(1+i)^{m} = \frac{v^{n}}{v^{m}} = v^{n-m} \,.$$

Dafür kann man auch schreiben:

(20)
$$\frac{v^{n}}{v^{m}} = \frac{A_{\overline{n}|}}{A_{\overline{m}|}} = {}_{m}G_{\overline{n}|} \,.$$

Mit dem Symbol G ist dabei der Begriff des Guthabens ausgedrückt.

Ist die Versicherung zu laufenden Prämien abgeschlossen, die während der ganzen Versicherungsdauer zu zahlen sind, so ergeben diese Prämien nach m Jahren das Guthaben

$$(21) \qquad P_{\overline{n}|} \cdot r_{\overline{m}|} = P_{\overline{n}|} \frac{1}{P_{\overline{m}|}} = \frac{P_{\overline{n}|}}{P_{\overline{m}|}} = \frac{r_{\overline{m}|}}{r_{\overline{n}|}} = {}_m g_{\overline{n}|} \,.$$

Ist die Dauer der Prämienzahlung aber auf t Jahre begrenzt, so ergibt sich nach m Jahren das Guthaben:

$$(22) \qquad {}_tP_{\overline{n}|} \cdot r_{\overline{m}|} = \frac{{}_tP_{\overline{n}|}}{P_{\overline{m}|}} = {}_{m|t}\, g_{\overline{n}|} \,,$$

solange $m < t$ ist. Wird $m \geqq t$, so werden keine Einlagen mehr geleistet. Der zurückzustellende Betrag nimmt dann einfach die Form v^{n-m} an.

Da der Fall, daß die Prämienzahlungsdauer kürzer bemessen wird als die Versicherungsdauer, immerhin selten vorkommt, so sind hier besonders die Formeln (20) und (21) von Wichtigkeit. Diese beiden Formeln lassen erkennen, daß man den zurückzustellenden Betrag durch das Verhältnis zweier einmaligen Prämien oder zweier Nettojahresprämien ausdrücken kann. Man kann also auf die Heranziehung der Rentenendwerte verzichten, sofern nur die Nettoprämien für alle Dauern bekannt sind.

Liegt verstärkt abgekürzte Prämienzahlung vor, so bleibt nichts übrig als das Guthaben aus den Einlagen aufzubauen oder sonstwie zu bestimmen. Baut man auf den Einlagen auf, so hat man einfach:

$$(23) \qquad {}_{m|t}\, g_{\overline{n}|} = {}_tP_{\overline{n}|} \cdot r_{\overline{m}|} \,,$$

da dann die Einlagen ${}_tP_{\overline{n}|}$ bis zum Schlusse des m-ten Jahres angesammelt und verzinst sein müssen. Unter Verwendung der Formel (19a) kann man dann auch schreiben:

$$(24) \qquad {}_{m|t}\, g_{\overline{n}|} = \frac{r_{\overline{m}|}}{r_{\overline{t}|}} \cdot v^{n-t} \,.$$

Diese Formel gilt allgemein. Denn wenn $t = n$ wird, geht sie über in die Formel (21).

Hier ergibt sich Gelegenheit, noch auf eine andere wichtige Beziehung hinzuweisen. Aus der Formel ($15\underline{b}$) nämlich folgt ohne weiteres:

$$A_{\overline{n}|} = v^n = 1 - d \cdot a_{\overline{n}|} \,. \tag{25}$$

Der Summenbarwert wird danach durch den Rentenbarwert ausgedrückt. Auch für den Summenendwert gibt es eine entsprechende Formel. Denn es ist ($6\underline{b}$):

$$r_{\overline{n}|} = q\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{d} \qquad \text{und somit:}$$

$$q^n = (1+i)^n = 1 + d \cdot r_{\overline{n}|} \,. \tag{26}$$

Doch ist diese Beziehung weniger wichtig als die für den Summenbarwert gefundene.

Wir können mit Hilfe der neuen Bezeichnungsweise die für das Guthaben der Sparversicherung aufgestellte Formel (21) umformen und anders deuten. Es ist:

$${}_m g_{\overline{n}|} = \frac{r_{\overline{m}|}}{r_{\overline{n}|}} = \frac{v^{n-m}(q^{n-m+1} + q^{n-m+2} + \ldots\ldots + q^n)}{r_{\overline{n}|}} \,,$$

$${}_m g_{\overline{n}|} = \frac{v^{n-m}[r_{\overline{n}|} - r_{\overline{n-m}|}]}{r_{\overline{n}|}} = v^{n-m}\left[1 - \frac{r_{\overline{n-m}|}}{r_{\overline{n}|}}\right] ,$$

$${}_m g_{\overline{n}|} = v^{n-m} - \frac{1}{r_{\overline{n}|}} \cdot r_{\overline{n-m}|} \cdot v^{n-m} \,.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungsgleichung ($15\underline{c}$) ist dann:

$${}_m g_{\overline{n}|} = v^{n-m} - \frac{1}{r_{\overline{n}|}} \cdot a_{\overline{n-m}|} \qquad \text{und somit:}$$

$${}_m g_{\overline{n}|} = A_{\overline{n-m}|} - P_{\overline{n}|} \cdot a_{\overline{n-m}|} \,. \tag{27}$$

Diese Formel wird in der Praxis mit Vorliebe angewendet. Sie erlaubt auch eine einfache Berechnung für die Versicherung mit verstärkt abgekürzter Prämienzahlung. Denn der Wert $A_{\overline{n-m}|}$ als Barwert der nach $(n-m)$ Jahren fälligen Summe bleibt unverändert; für die einfache Prämie $P_{\overline{n}|}$ aber tritt die besondere Prämie ${}_t P_{\overline{n}|}$ ein, die nach

m Jahren nicht mehr weitere (n—m) Jahre, sondern nur noch (t—m) Jahre hindurch zu entrichten ist. Es ist also für die Versicherung mit verstärkt abgekürzter Zahlung:

$$(28) \qquad {}_{m|t}g_{\overline{n}|} = A_{\overline{n-m}|} - {}_tP_{\overline{n}|} \cdot a_{\overline{t-m}|}\,,$$

wobei $m \leqq t$ sein wird. Für $m = t$ wird $a_{\overline{t-m}|} = 0$, für $m \geqq t$ wird dann einfach:

$${}_mg_{\overline{n}|} = {}_mG_{\overline{n}|} = A_{\overline{n-m}|} = v^{n-m}$$

gesetzt.

5. Kapitel.

Die statistischen Grundlagen der Lebensversicherung.

Die Wahrscheinlichkeit des Schadens ist davon abhängig, welcher der verschiedenen Gefahrenklassen das versicherte Objekt angehört. In der Lebensversicherung könnte man im gewissen Sinne die Altersklassen als Gefahrenklassen ansehen. Daneben lassen sich aber in der Lebensversicherung auch richtige Gefahrenklassen unterscheiden, die indes erst auf Grund einer Berufsstatistik oder auf Grund der ärztlichen Auslese gebildet werden könnten. Die vom Alter abhängige Verschiedenheit des Risikos bleibt dann innerhalb jeder Gefahrenklasse für sich bestehen.

In der Versicherungsrechnung kann nur die Abstufung des Risikos nach dem Alter in Betracht kommen. Die weitere Einteilung nach Gefahrenklassen ist dann der Praxis der Gesellschaften sowie der Statistik zu überlassen.

Wird das Wagnis (Risiko) nach dem Alter abgestuft, so ist im allgemeinen die Sterbegefahr umso größer, je höher das Alter ist. Das gilt jedoch nicht für die jüngsten Altersklassen. Die Sterbegefahr der Neugeborenen ist zunächst ziemlich groß. Sie nimmt dann sehr schnell ab, erreicht mit einem bestimmten Alter, nämlich etwa um das

15. Lebensjahr herum, ihr Minimum und steigt dann wieder mit wachsendem Alter. Dieser Verlauf der Sterblichkeit gilt jedoch im allgemeinen nur für Bevölkerungsklassen. Die Sterblichkeit einer Gemeinschaft von Wagnissen, die auf Grund irgend einer besonderen Auslese in die Lebensversicherung aufgenommen worden sind, kann gegenüber der Sterblichkeit einer Bevölkerungsklasse merkliche Abweichungen aufweisen.

So kann zum Beispiel bei gleichem Alter die Sterbegefahr sehr verschieden sein, je nachdem der Zeitpunkt mehr oder weniger weit zurückliegt, an dem die Auslese stattgefunden hat. Ein 40jähriger, der eine Todesfallversicherung beantragt hat und der daraufhin gerade untersucht und als aufnahmefähig befunden worden ist, wird eine andere, und zwar günstigere Sterblichkeit aufweisen als ein 40jähriger, der beispielsweise schon seit 10 Jahren versichert ist, für den also der Zeitpunkt der Auslese bereits 10 Jahre zurückliegt. Umgekehrt gestalten sich die Verhältnisse, wenn die Auslese vom Antragsteller selbst bewirkt wird, also zum Beispiel in der Rentenversicherung.

Diese Erkenntnis hat so allgemein Geltung gefunden, daß demgegenüber die früher für die Sterblichkeitsmessung viel benutzten theoretischen Formeln von Gompertz und Makeham ziemlich verblaßt sind.

Gompertz ging aus von der Annahme, daß das Sterblichkeitsmaß einen festliegenden und einen veränderlichen Wert enthalten müsse. Der festliegende Wert sollte die gleichmäßig das Leben bedrohenden Gefahren ausdrücken, der veränderliche, vom Alter abhängige Wert, sollte die Verschiedenheit der Widerstandsfähigkeit berücksichtigen. Es ergab sich so für die „Sterbeintensität“ der Ausdruck:

$$\mu_x = B \cdot c^x \,, \qquad (29\underline{a})$$

der später von Makeham erweitert wurde zu:

$$\mu_x = A + B \cdot c^x \,. \qquad (29\underline{b})$$

Die „Sterbeintensität“ μ_x ist näherungsweise dargestellt durch den Ausdruck:

(30) $$\mu_x = \frac{l_{x-1} - l_{x+1}}{2 \cdot l_x}.$$

Für die Zahlen der Lebenden des Alters x ergeben sich daraus die Gleichungen:

(31a) $$l_x = k \cdot g^{c^x}$$ und

(31b) $$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x},$$

wobei k, g, s und c aus den Ergebnissen der Beobachtungen zu bestimmende Konstanten sind.

Die Formeln von Gompertz und Makeham werden in der Praxis wenig angewendet, obwohl sie einige Vorteile bieten. Zu beachten ist, daß sie die Sterbegefahr nur vom erreichten Alter, nicht von der zurückgelegten Versicherungsdauer abhängig machen; es können mit ihnen also nur „einfach abgestufte" Sterbetafeln geschaffen werden. Doch sind solche für die Praxis im allgemeinen ausreichend.

Im folgenden soll nur mit einfach abgestufter Sterblichkeit gerechnet werden.

Angenommen nun, es seien l_x Personen mit dem Eintrittsalter von x Jahren in die Versicherung eingetreten.

Mit dem Symbol l bezeichnet man die Lebenden einer bestimmten Altersklasse. Der hinzugefügte Index gibt das Alter an. Man kann jede Zahl der Lebenden auch als Zahl der Eintretenden ansehen.

Es sei weiter angenommen, daß im Laufe eines Jahres d_x Personen infolge Ablebens ausscheiden.

Mit dem Symbol d wird die Zahl der Toten, das heißt also der Absterbenden einer bestimmten Altersklasse bezeichnet.

Für das Ableben des x jährigen ergibt sich dann die statistische Wahrscheinlichkeit:

(32) $$q_x = \frac{d_x}{l_x}.$$

Sind zum Beispiel 10 000 Personen im Alter von 30 Jahren eingetreten und im Laufe des Jahres davon 84 Personen gestorben, so ist:

$$q_{30} = \frac{84}{10000} = 0{,}0084 \, .$$

Für die Herstellung einer Statistik kommt dabei noch inbetracht, daß ein Teil der in ein bestimmtes Altersjahr eintretenden Personen, also ein Teil der Lebenden l_x nicht ein volles Jahr unter Wagnis steht. Bildet man große Gruppen von Zähleinheiten, und nimmt man die Zählung für einen ganz bestimmten Termin vor, so stehen zum Beispiel die Zähleinheiten, die im letzten Zähljahr zugegangen sind, im Durchschnitt meist nur ein halbes Jahr unter Wagnis, was nötigenfalls nicht unbeachtet bleiben darf.

Übrigens sei hier auch erwähnt, daß ein immerhin merklicher Teil der Versicherten bei Lebzeiten die Versicherung auflöst. Werden solche Personen als statistische Einheiten gezählt, so ist das bisweilen nicht ganz richtig, weil viele davon nicht ein ganzes Jahr unter Wagnis gestanden haben werden. Zwar schreiben die in Deutschland seit dem Jahre 1910 geltenden allgemeinen Versicherungsbedingungen (die sogenannten Normativbedingungen) ausdrücklich vor, daß eine Versicherung stets nur für den Schluß des laufenden Versicherungsjahres soll gekündigt werden können. Anderseits steht den Versicherungsnehmern aber doch das Recht zu, von einem bestimmten Zeitpunkte die Prämienzahlung auch innerhalb des Versicherungsjahres nach Belieben zu unterbrechen und auch darauf zu verzichten, während des Versicherungsjahres weiterhin versichert zu bleiben. Solange die Versicherung übrigens noch keinen „Rückkaufswert“ aufweist, also namentlich im ersten Versicherungsjahr, wird praktisch doch ziemlich häufig der Fall eintreten, daß nur für einen Teil des Jahres das Wagnis zu tragen war.

Die theoretische Genauigkeit der auf der Statistik aufgebauten Zahlen wird mehrfach gerade dadurch beeinträchtigt, daß ein Teil der Versicherten vorzeitig die Versicherung auflöst. Die Personen nämlich, die das tun, können im allgemeinen als gute Lebenswagnisse angesehen werden;

ihre Sterbegefahr stimmt dann also mit der durchschnittlichen Sterbegefahr zweifellos nicht überein.

Man hat in der Praxis mancherlei versucht, um zu einer möglichst genauen Sterblichkeitsmessung zu kommen. Es läßt sich in der Tat auch nicht leugnen, daß die Sterbetafeln der Neuzeit im allgemeinen verhältnismäßig genau ausgefallen sind. Im einzelnen zeigen sie jedoch merkliche Abweichungen nicht nur untereinander, sondern auch gegenüber den Erfahrungen, die sich dann weiterhin ergeben haben.

Es würde zu weit führen, darauf genauer einzugehen. Allgemein sei nur wiederholt, daß man die „summarische" Sterbetafel von der „Selektsterbetafel" unterscheidet.

In der summarischen Sterbetafel ist die Sterbenswahrscheinlichkeit ausschließlich vom Alter abhängig, in der Selekttafel außerdem auch noch von der zurückgelegten Versicherungsdauer.

Selektsterbetafeln werden in Deutschland nur vereinzelt angewendet. Die Erfahrung hat gelehrt, daß sich auch mit der summarischen Tafel sehr gut arbeiten läßt, obwohl sie theoretisch nicht so genau ist wie eine Selektsterbetafel.

Im folgenden sei den Betrachtungen zugrunde gelegt die weitverbreitete Tafel der 23 deutschen Gesellschaften (M. u. W. I). Das ist eine summarische, also eine einfach abgestufte Tafel.

Wird eine solche Tafel angewendet, so ist die nach der Formel (32) berechnete Wahrscheinlichkeit des Ablebens einfach eine Funktion des Alters; sie gibt an das Verhältnis der Zahl der nach der Statistik absterbenden Personen des Alters x zu der Zahl der Personen, die nach der Statistik zu Beginn des Jahres am Leben waren.

Wenn aber von den l_x Personen des Alters x im Laufe des Jahres d_x Personen gestorben sind, so sind im Alter $(x+1)$ noch:

(33) $$l_{x+1} = l_x - d_x$$

Personen am Leben. Ausdrücklich sei hier darauf hinge-

wiesen, daß dabei als ausscheidende Personen nur die Absterbenden angesehen werden. Richtig ist diese Annahme eigentlich nicht, da in einer bestimmten Gruppe von Personen, wie bereits hervorgehoben worden ist, nicht nur die Ablebenden eine Veränderung hervorbringen, sondern auch die, die die Versicherung bei Lebzeiten auflösen. Wollte man das berücksichtigen, so erhielte man sehr umständliche Formeln, ohne davon einen allzu großen Nutzen zu haben. Auf das sogenannte „Storno“ soll also im folgenden keinerlei Rücksicht genommen werden.

Rechnet man nur mit den Lebenden und den Absterbenden, so kann man mit Hilfe der Sterbenswahrscheinlichkeiten eine Absterbeordnung aufbauen. Denn nach der Formel (33) ergibt sich die Zahl der Lebenden einer bestimmten Altersklasse ohne weiteres aus den Zahlen der Lebenden und der Gestorbenen der vorhergehenden Altersklasse. Eine solche Absterbeordnung, also eine Tafel der Werte l_x, bezeichnet man auch als „Dekremententafel“.

Wird vom Storno abgesehen, so gibt die Dekremententafel Aufschluß über das wahrscheinliche Absterben bestimmter Gemeinschaften von Versicherten. Als Ausgangspunkt kann dabei beliebig irgend eines der in der Tafel enthaltenen Alter angesehen werden. Es darf jedoch nicht übersehen werden, daß die Gemeinschaft völlig in sich abgeschlossen ist. Wenn zum Beispiel nach der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften im Alter von 30 Jahren 91 578 Personen vorhanden sind, von denen im Laufe des Jahres 808 Personen absterben, sodaß im Alter von 31 Jahren noch 90 770 Personen am Leben sind, so ist dabei nicht berücksichtigt, daß eine bestimmte Anzahl von Personen neu aufgenommen wird. Außerdem ist, um das nochmals hervorzuheben, von der an sich zwar unzutreffenden, für die theoretische Rechnung jedoch unbedenklich zulässigen Annahme ausgegangen, daß alle 90 770 Personen, die das eine Jahr durchlebt haben, tatsächlich noch im Bestande vorhanden seien.

6. Kapitel.

Die Wahrscheinlichkeitsbegriffe in der Lebensversicherung.

Ohne die Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung wäre eine exakte Lebensversicherungstechnik nicht denkbar. Es seien daher die wichtigsten Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die im vorstehenden schon wiederholt berührt worden sind, im folgenden zusammengestellt und kurz erläutert.

Als mathematische Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses bezeichnet man das Verhältnis der dem Eintreffen des Ereignisses günstigen Fälle zu der Gesamtheit aller möglichen Fälle.

Wirft man zum Beispiel mit einem sechsseitigen Würfel, dessen Seitenflächen mit den Augenzahlen 1 bis 6 versehen sind, so hat man für das Auffallen irgend einer beliebigen Augenzahl, zum Beispiel einer 3, die Wahrscheinlichkeit 1/6; denn es ist nur der eine günstige Fall vorhanden, nämlich eben der, daß eine 3 erscheint, während im ganzen 6 Fälle überhaupt möglich sind.

Dieser Grundsatz läßt sich leicht auf die Lebensversicherung ausdehnen. Man kann nämlich die Zahl l, also die Anzahl der Lebenden eines bestimmten Alters, als die Gesamtheit aller möglichen Fälle ansehen. Fragt man dann nach der Wahrscheinlichkeit des Ablebens, so ist die Zahl d als die Zahl der „günstigen", nämlich der dem erwartenden Ereignis des Ablebens günstigen Fälle anzusehen. Man erhält somit die bereits angegebene Formel (32):

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

als Ausdruck für die Sterbenswahrscheinlichkeit.

Wenn ferner beim Würfeln mit dem sechsseitigen Würfel die Wahrscheinlichkeit für das Auffallen der Augenzahl 3 ausgedrückt war durch das Verhältnis 1/6, so ist

die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nicht eine 3 geworfen wird, ausgedrückt durch das Verhältnis 5/6. Denn diesem Ereignis, daß nicht eine 3 geworfen wird, sind unter den 6 überhaupt möglichen Fällen im ganzen 5 Fälle günstig.

Beide Verhältniszahlen zusammen ergeben die Einheit. Ergibt sich aber für das Eintreffen eines Ereignisses die mathematische Wahrscheinlichkeit 1, so ist das Eintreffen des Ereignisses gewiß; denn der Wert 1 kann sich als Verhältniszahl nur dann ergeben, wenn die Anzahl der günstigen Fälle mit der Anzahl der möglichen Fälle zusammenfällt. In der Tat ist es auch gewiß, daß beim Würfeln mit dem sechsseitigen Würfel entweder eine 3 oder nicht eine 3 erscheinen wird; denn eine andere Möglichkeit gibt es nicht.

Die Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter, einander ausschließender Ereignisse ergänzen sich also zur Einheit.

So auch in der Lebensversicherung! Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der xjährige im Laufe des Jahres stirbt, ist $q_x = \frac{d_x}{l_x}$; die Wahrscheinlichkeit dafür aber, daß er nach einem Jahre noch am Leben ist, wird dann:

$$p_x = 1 - \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - d_x}{l_x}. \tag{34}$$

Tatsächlich ist auch $(l_x - d_x)$ der Ausdruck für die Überlebenden des Alters x, das heißt für die Personen, die von den xjährigen nach einem Jahre noch am Leben sind. Es ist, wie bereits gezeigt,

$$l_{x+1} = l_x - d_x.$$

Auch für die Lebensversicherung ergibt sich dann im besonderen die Gleichung:

$$p_x + q_x = 1, \tag{35}$$

die sehr wichtig ist, weil sie, wie später noch gezeigt werden wird, den Schlüssel enthält zu der Beziehung der Zahlen der Lebenden zu denen der Toten. An sich besagt die

Gleichung, daß es gewiß ist, daß ein xjähriger nach einem Jahre entweder noch am Leben ist, oder daß er inzwischen gestorben ist.

Wirft man nicht mit einem, sondern mit zwei sechsseitigen Würfeln, oder werfen zwei Spieler je mit einem sechsseitigen Würfel, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Würfel mit der Augenzahl 3 auffallen, offenbar ausgedrückt durch die Verhältniszahl 1/36. Denn es gibt nur den einzigen günstigen Fall, daß beide Würfel gleichzeitig mit der Augenzahl 3 auffallen; im ganzen aber gibt es 36 überhaupt mögliche Fälle, wovon man sich durch Auszählen leicht überzeugen kann. Dieselbe Wahrscheinlichkeit ergäbe sich zum Beispiel auch dafür, daß der eine Würfel mit der Augenzahl 3, der andere mit der Augenzahl 4 auffällt. Da jedem der beiden einzelnen Ereignisse die Wahrscheinlichkeit 1/6 zukommt, so ist die gefundene Wahrscheinlichkeit 1/36 einfach das Produkt aus den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Allgemein ist die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß zwei (oder mehr) von einander unabhängige Ereignisse zu gleicher Zeit eintreffen, gleich dem Produkt der den einzelnen Ereignissen zukommenden Wahrscheinlichkeiten.

Ist in der Lebensversicherung zum Beispiel nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß nach einem Jahre eine xjährige Person gestorben sei, während eine yjährige Person noch am Leben sein soll, so ergibt sich dafür der Ausdruck $q_x \cdot p_y$. Ebenso ergäbe sich zum Beispiel für die Wahrscheinlichkeit, daß beide Personen nach einem Jahre noch am Leben sind, der Ausdruck $p_x \cdot p_y$.

Wird wieder mit einem sechsseitigen Würfel geworfen, und wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, daß eine ungerade Augenzahl (1, 3 oder 5) auffällt, so ist diese Wahrscheinlichkeit offenbar gleich 1/2. Denn im ganzen gibt es 6 mögliche Fälle; und davon ist die Hälfte dem Eintreffen des Ereignisses günstig. Die Wahrscheinlichkeit ist offenbar auch zusammengesetzt aus den Wahr-

scheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse; nur ist hier von den einzelnen Wahrscheinlichkeiten nicht das Produkt, sondern die Summe gebildet.

Allgemein ist die mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, daß von zwei (oder mehr) Ereignissen, die voneinander unabhängig sind, entweder das eine oder das andere eintrifft, gleich der Summe der den einzelnen Ereignissen zukommenden Wahrscheinlichkeiten.

Die Anwendung dieses Satzes von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit erfordert mitunter eine gewisse Achtsamkeit. In der Lebensversicherung sind die beiden Ereignisse oft insofern nicht voneinander unabhängig, als das eine Ereignis das andere zum Teil auch mitumfassen kann.

Ist zum Beispiel nach der Wahrscheinlichkeit dafür gefragt, daß nach einem Jahre von zwei Personen im Alter von x und y Jahren entweder die eine oder die andere noch am Leben ist, so wäre es falsch, diese Wahrscheinlichkeit durch die Summe $(p_x + p_y)$ ausdrücken zu wollen. Das ergäbe sich meist schon ohne weiteres aus der Rechnung. Ist zum Beispiel $x = 30$, $y = 40$, so ergibt sich nach der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften:

$$\begin{aligned} p_{30} &= 0{,}9911769 \\ p_{40} &= \underline{0{,}9882357} \\ p_{30} + p_{40} &= 1{,}9794126. \end{aligned}$$

Da keine mathematische Wahrscheinlichkeit größer sein kann als 1, so muß das Ergebnis falsch sein. Der Fehler liegt darin, daß eine bestimmte Wahrscheinlichkeit doppelt gezählt ist. Es ist das die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach einem Jahre beide Personen noch am Leben sind. Diese Möglichkeit ist sowohl in der Wahrscheinlichkeit dafür enthalten, daß der xjährige noch am Leben ist, wie auch in der Wahrscheinlichkeit dafür, daß der yjährige noch am Leben ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide noch am Leben sind, muß also, da sie in der Summe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten doppelt enthalten ist, mit ihrem einfachen Betrage wieder abgezogen werden. Diese Wahrscheinlich-

keit, daß beide noch am Leben sind, ist gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten. Es ist aber:

$$p_{30} \cdot p_{40} = 0{,}9795164 .$$

Zieht man dieses Produkt von der vorher gefundenen Summe ab, so erhält man den richtigen Wahrscheinlichkeitswert $p_{\overline{x,\,y}}$:

$$\begin{array}{rcl} p_{30} + p_{40} & = & 1{,}9794126 \\ p_{30} \cdot p_{40} & = & 0{,}9795164 \\ \hline \text{Diff.} = p_{\overline{30,\,40}} & = & 0{,}9998962. \end{array}$$

Die Wahrscheinlichkeit $p_{\overline{30,\,40}}$ kommt der Gewißheit sehr nahe, was auch zu erwarten war.

Sie läßt sich auch bestimmen, wenn man zunächst von der Sterbenswahrscheinlichkeit ausgeht. Da findet man nämlich als Wahrscheinlichkeit dafür, daß beide Personen im Laufe des Jahres sterben, das Produkt $q_{30} \cdot q_{40} = 0{,}0001038$, und wenn man dieses Produkt zur Einheit ergänzt, so hat man die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, daß nicht beide Personen im Laufe des Jahres sterben, daß also entweder beide oder wenigstens eine von ihnen am Leben bleibt. Auch auf diesem Wege findet man die Wahrscheinlichkeit 0,9998962.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein xjähriger gerade im ersten Jahre stirbt, ist nach der Formel (32) ${}^1q_x = \frac{d_x}{l_x}$.

Es läßt sich auch angeben, wie wahrscheinlich es ist, daß ein xjähriger gerade im zweiten Jahr stirbt. Von den l_x Personen nämlich, die im Alter x vorhanden sind, sterben nach der Tafel d_{x+1} Personen gerade im zweiten Jahre. Also ist:

$${}^2q_x = \frac{d_{x+1}}{l_x}$$

und allgemein

$$(36) \qquad {}^nq_x = \frac{d_{x+n-1}}{l_x} .$$

Summiert man diese Wahrscheinlichkeiten, so kommt man auf Umwegen zu sehr häufig gebrauchten Werten. Es ist

nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein xjähriger entweder im 1. Jahre oder im 2. Jahre oder im 3. Jahre usw. oder im n-ten Jahre stirbt, ausgedrückt durch die Summe:

$$\sum_{m=0}^{m=n-1} \frac{d_{x+m}}{l_x} = \frac{\sum\limits_{m=0}^{m=n-1} d_{x+m}}{l_x}.$$

Mit dem Symbol $\sum\limits_{m=0}^{m=n-1}$ ist dabei ausgedrückt, daß von den einzelnen Werten die Summe gebildet werden soll, wobei zunächst $m = 0$, dann $m = 1$, $m = 2$ usw., zuletzt $m = (n-1)$ zu setzen ist. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also gleich der Summe:

$$\frac{d_x + d_{x+1} + d_{x+2} + \ldots + d_{x+n-1}}{l_x}.$$

Aus der Formel (33) aber folgt:

$$\begin{aligned} d_x &= l_x - l_{x+1}, \\ d_{x+1} &= l_{x+1} - l_{x+2}, \\ d_{x+2} &= l_{x+2} - l_{x+3}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{x+n-1} &= l_{x+n-1} - l_{x+n}. \end{aligned}$$

Setzt man diese Werte in die obige Summe der Reihe nach ein, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit hätte aber auch anders gefunden werden können. Ist nämlich p_x die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der xjährige nach einem Jahre noch am Leben ist, und schreibt man auch hier das vollständige Symbol, so ist:

$${}_1p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x};$$

ebenso ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der xjährige nach zwei Jahren noch am Leben ist

$$ {}_2p_x = \frac{l_{x+2}}{l_x} , $$

und allgemein die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der xjährige nach n Jahren noch am Leben ist,

$$ (37\underline{^a}) \qquad {}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} . $$

Daraus ergibt sich dann als entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit dafür, daß der xjährige nach n Jahren nicht mehr am Leben ist, daß er also inzwischen gestorben ist, ohne weiteres der Ausdruck:

$$ (37\underline{^b}) \qquad {}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} , $$

was mit dem vorher gefundenen Ausdruck übereinstimmt.

Mit Hilfe der Formel $(37\underline{^a})$ läßt sich das sogenannte wahrscheinlichste Lebensalter und daraus die wahrscheinlichste Lebensdauer berechnen. Das wahrscheinlichste Lebensalter ist das Alter, für das die Wahrscheinlichkeit, daß es der Versicherte erlebt, gerade so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß er es nicht erlebt. Sollen beide Wahrscheinlichkeiten gleich sein, so muß zunächst sein:

$$ {}_np_x = {}_nq_x $$ und alsdann

$$ \frac{l_{x+n}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} , $$ also

$$ (37\underline{^c}) \qquad \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{2} . $$

Man bestimmt das Alter $(x + N)$ aus der Gleichung:

$$ (37\underline{^d}) \qquad l_{x+N} = \frac{1}{2} l_x , $$

indem man von der Zahl der Lebenden des Eintrittsalters die Hälfte nimmt und in der Tafel der Werte l_x die Zahl

aufsucht, die dem gefundenen Wert $\frac{1}{2}\,l_x$ am nächsten liegt. Man kann dabei das zu bestimmende Endalter auch interpolieren. Aus dem wahrscheinlichsten Lebensalter findet man dann ohne weiteres die wahrscheinlichste Lebensdauer, indem man von dem ermittelten Endalter das gegebene Eintrittsalter abzieht.

Nicht zu verwechseln mit der wahrscheinlichsten Lebensdauer ist die sogenannte mittlere Lebensdauer. Darunter versteht man den Mittelwert der von einer bestimmten Gruppe von Personen durchlebten Lebensjahre. Dieser Mittelwert ist ausgedrückt durch die Summe:

$$\frac{l_x + l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots}{l_x},$$

wobei die Zahlen der Lebenden bis ans Ende der Sterblichkeitstafel zu summieren sind. Man bezeichnet die mittlere Lebensdauer gewöhnlich mit dem Symbol $\mathring{e}_x$. Es ist dann also:

$$\mathring{e}_x = \frac{\Sigma\, l_x}{l_x}\,. \tag{38a}$$

Das einfache Symbol $\Sigma\, l_x$ drückt dabei aus, daß die Zahlen der Lebenden so weit zu summieren sind, wie Werte in der Tafel vorhanden sind.

Die Betrachtung der Formel gibt Gelegenheit, einen wichtigen Grundsatz der Versicherungstechnik zu erwähnen. Wie aus der Formel nämlich ohne weiteres hervorgeht, sind die von der Gruppe durchlebten Jahre stets als volle Jahre gezählt. Es ist also angenommen, daß l_x Personen je ein volles Jahr durchleben, daß dann l_{x+1} Personen wieder je ein volles Jahr durchleben und so fort. Die Annahme träfe das Richtige, wenn alle Absterbenden stets genau am Ende des Jahres stürben. Von dieser Annahme geht man in der Technik der Lebensversicherung im allgemeinen auch tatsächlich aus, wovon an anderer Stelle noch die Rede sein wird. Richtig ist die Annahme aber eigentlich nicht. Denn im Mittel sterben die Versicherten nicht

am Schlusse des Jahres, sondern in der Mitte des Jahres, wenn nämlich angenommen wird, daß das Ableben sich gleichmäßig über das ganze Jahr verteilt. Bei der Bestimmung der mittleren Lebensdauer läßt sich diese Tatsache sehr wohl berücksichtigen.

Wenn nämlich von den l_x Personen die im Laufe des Jahres absterbenden d_x Personen im Mittel nur ein halbes Jahr am Leben sind, dann ist der Gesamtwert der von den l_x Personen durchlebten Jahre noch zu vermindern um je ein halbes Jahr für die absterbenden Personen, im ganzen also um den Betrag $\frac{1}{2} d_x$. Ebenso ist der Wert der von den l_{x+1} Personen weiterhin durchlebten Jahre zu vermindern um $\frac{1}{2} d_{x+1}$ usw. Man erhält dann also als genauen Wert der durchlebten Jahre den Ausdruck

$$\Sigma l_x - \frac{1}{2} \Sigma d_x \; ;$$

und da die Summe aller während der ganzen Zeit absterbenden Personen mit der Zahl der Personen übereinstimmen muß, die zu Anfang am Leben waren -- denn diese sind es ja, die inzwischen gestorben sind —, so ist die Zahl der durchlebten Jahre ausgedrückt durch die Differenz $\Sigma l_x - \frac{1}{2} l_x$. Verteilt man diesen Wert der insgesamt durchlebten Jahre auf die l_x Personen, von denen man ausgegangen ist, so ergibt sich als genauerer Wert der mittleren Lebensdauer der Ausdruck:

$$(38\underline{b}) \qquad e_x = \frac{\Sigma l_x - \frac{1}{2} l_x}{l_x} = \frac{\Sigma l_x}{l_x} - \frac{1}{2} = \mathring{e}_x - \frac{1}{2} \, .$$

Die „gekürzte" mittlere Lebensdauer ist also um ein halbes Jahr geringer zu veranschlagen als die „vollständige" mittlere Lebensdauer.

7. Kapitel.

Die Versicherungen zur einmaligen Prämie.

Obwohl Versicherungen zur einmaligen Prämie in der Praxis verhältnismäßig selten vorkommen und nur für die Rentenversicherung die Regel bilden, ist der Begriff der einmaligen Prämie doch für die Lebensversicherung von außerordentlicher Wichtigkeit. Denn die einmalige Prämie einer Versicherung ist nichts anderes als ihr Barwert, also der gegenwärtige Wert aller mit der Versicherung von der Gesellschaft übernommenen Leistungen.

Zu beachten ist dabei, daß hier zunächst nur vom Nettowert die Rede ist, also von dem mathematischen, noch nicht mit besonderen Zuschlägen versehenen Barwert.

Daß die einmalige Nettoeinlage weiter nichts sein kann als der gegenwärtige mathematische Wert der von der Gesellschaft übernommenen Verpflichtungen, ist selbstverständlich. Denn die einmalige Einlage soll doch so beschaffen sein, daß sie es der Gesellschaft gerade ermöglicht, ihre Verpflichtungen zu erfüllen; sie muß demgemäß den Wert dieser Verpflichtungen restlos in sich enthalten, ohne ihn zu übersteigen.

Es gibt zwei Wege, die dazu führen, den Barwert der Versicherung zu ermitteln: Entweder bestimmt man ihn mit Hilfe der mathematischen Erwartung, also mit Hilfe entsprechender Wahrscheinlichkeiten; oder man stellt einfach die Leistung der Gegenleistung gegenüber, wobei man dann zu berücksichtigen hat, daß die einzelnen Leistungen zu verschiedenen Zeiten fällig werden.

An der zunächst zu behandelnden Versicherung auf den Lebensfall mögen beide Wege gezeigt werden. Weiterhin wird dann immer die Form der Ableitung gewählt werden, die sich von selbst ergibt.

I. Die Versicherung auf den Lebensfall.

Als Versicherung auf den Lebensfall (bisweilen auch „reine Erlebensfallversicherung“ genannt) wird die Versicherung bezeichnet, bei der die versicherte Summe — im folgenden zunächst immer gleich der Einheit angenommen* — nur dann fällig wird, wenn der im Alter von x Jahren eingetretene Versicherte das rechnungsmäßige Alter $(x+n)$ erreicht, also nach n Jahren noch am Leben ist.

Wegen der Berechnung des Alters sei hier darauf hingewiesen, daß im allgemeinen das rechnungsmäßige Alter von x Jahren zugrunde gelegt wird, wenn das wirkliche Alter mindestens $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ Jahre, höchstens jedoch $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ Jahre ausmacht. Die Grenzen kommen dabei praktisch fast nie zur Geltung, weil im Zweifelsfalle einfach der Beginn der Versicherung so gelegt werden kann, daß der Grenzwert vermieden wird.

Die allgemein für die Bestimmung des rechnungsmäßigen Alters geltende Regel erleidet gewöhnlich eine Ausnahme, wenn es sich um Versicherungen handelt, die auf den Lebensfall abgeschlossen werden (vor allem also bei Rentenversicherungen). Da werden dann meist nur voll durchlebte Altersjahre gezählt; es wird also das am letzten Geburtstag erreichte Lebensalter als rechnungsmäßiges Alter zugrunde gelegt. Einheitlich gelten jedoch diese Bestimmungen nicht.

Es sei ferner bemerkt, daß die Gesellschaften fast durchweg mit einjährigen Altersklassen rechnen, daß indes auch eine andere Klassenbildung (halbjährige Altersklassen, vierteljährige Altersklassen usw.) praktisch möglich ist, wie sie

*) Im praktischen Betrieb gibt man die Zahlen meist für die Einheit 1000, also in sogenannten „Promillesätzen“ an; man schreibt dann beispielsweise einen Barwert, der sich mathematisch auf den Betrag 0,625 berechnet, in der Form: 625 ‰ (pro mille) oder 625 v. T. (vom Tausend).

denn auch tatsächlich vereinzelt vorkommt. Die aus Gründen der Betriebsvereinfachung bisweilen vorgenommene Zusammenfassung von Altersklassen ist theoretisch zu verwerfen und auch praktisch nicht immer unbedenklich.

Wählt man für die Berechnung des Barwertes der Versicherung auf den Lebensfall den ersten Weg, so muß man ausgehen von der Wahrscheinlichkeit, daß der xjährige nach n Jahren noch am Leben ist. Man erhält dann die folgende Ableitung:

Angenommen, das versicherte Kapital wäre unbedingt nach n Jahren auszuzahlen. Im Zeitpunkte des Abschlusses der Versicherung hätte es dann den Wert v^n. Das Kapital soll jedoch nicht mit Bestimmtheit, sondern nur unter der Voraussetzung fällig werden, daß der xjährige nach n Jahren noch am Leben ist. Dafür ist die Wahrscheinlichkeit ${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$ [(37a)]. Wird aber das Kapital nicht mit Bestimmtheit, sondern nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit fällig, so ist sein Wert nicht sich selbst gleich, das heißt mit dem Werte der mathematischen Gewißheit zu multiplizieren, sondern es ist der Wert des Kapitals nur mit dem Werte der mathematischen Erwartung, also mit der in Frage kommenden Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren.

Bezeichnet man die einmalige Nettoeinlage mit ${}_nE_x$, so ist also:

$$(39a) \qquad {}_nE_x = v^n \cdot {}_np_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}.$$

Zu demselben Ergebnis kommt man, wenn man Leistung und Gegenleistung einander gegenüberstellt. Man hat dann folgendermaßen zu entwickeln:

Die Gesellschaft erhält von allen im Alter x eintretenden Personen die einmalige Nettoeinlage ${}_nE_x$; im ganzen erhält sie also den Betrag $l_x \cdot {}_nE_x$. Da während der Versicherungsdauer keinerlei Auszahlungen zu leisten sind, kann die Gesellschaft den eingelegten Betrag n Jahre hin-

durch verzinsen. Es ist dann nach n Jahren vorhanden das Kapital $l_x \cdot {}_nE_x \cdot (1+i)^n$. Dieses Kapital muß es der Gesellschaft ermöglichen, alsdann an die überlebenden Personen die Summe 1 auszuzahlen. Die überlebenden Personen sind ausgedrückt durch die Zahl l_{x+n}. Demgemäß entspricht der n Jahre hindurch aufgezinsten Leistung der Versicherungsnehmer, deren Wert nach n Jahren durch das Produkt $l_x \cdot {}_nE_x \cdot (1+i)^n$ ausgedrückt ist, als Gegenleistung der Betrag l_{x+n} (genauer: $l_{x+n} \cdot 1$). Beide Ausdrücke müssen einander gleich sein. Es ist also:

$$l_x \cdot {}_nE_x \cdot (1+i)^n = l_{x+n} \qquad \text{und mithin}$$

$$(39\underline{^b}) \qquad {}_nE_x = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x} = v^n \cdot {}_np_x \; ,$$

was mit der Formel ($39\underline{^a}$) übereinstimmt.

Diese Formel ermöglicht es bereits, die einmalige Nettoprämie, also den Barwert der Erlebensfallversicherung auszurechnen. Man pflegt jedoch den Formeln allgemein eine Form zu geben, die leichter zu handhaben ist. Um das zu erreichen, setzt man an die Stelle der einfachen Zahlen der Lebenden oder der Toten ihre diskontierten Werte; und zwar geschieht das folgendermaßen:

Man erweitert zunächst die Gleichung ($39\underline{^a}$) = ($39\underline{^b}$) mit der Zahl v^x. Man erhält dann:

$${}_nE_x = \frac{v^x \cdot v^n \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n}}{v^x \cdot l_x} \, .$$

Die Produkte von der Form $v^K \cdot l_K$ hat man tabellarisch berechnet und dafür das Symbol D_K eingeführt. Es ist also:

$$D_0 = v^0 \cdot l_0 = l_0 \; ,$$
$$D_1 = v^1 \cdot l_1 = v \cdot l_1 \; ,$$
$$D_2 = v^2 \cdot l_2 \; ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_K = v^K \cdot l_K \; ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_x = v^x \cdot l_x \; ,$$
$$D_{x+n} = v^{x+n} \cdot l_{x+n} \, .$$

Derartige Hilfszahlen werden in der Versicherungsrechnung bisweilen auch als Kommutationswerte bezeichnet.

Mit Hilfe der symbolischen Bezeichnungsweise gehen die Formeln (39) über in die Form:

$$(39\underline{c}) \qquad {}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} \,.$$

Hier bedarf es noch einer besonderen Bemerkung über die Wahl des Zinssatzes.

Da der Versicherungsvertrag ein Vertrag ist, der fast stets auf eine lange Reihe von Jahren, oft auf Jahrzehnte hinaus Geltung haben soll, so ist bei der Wahl des Zinssatzes eine gewisse Vorsicht am Platze, weil die Gesellschaft den einmal festgelegten Diskontsatz während der Vertragsdauer ja nicht ohne weiteres abändern darf. Das gilt selbstverständlich nicht nur für die Versicherung auf den Lebensfall, sondern ganz allgemein. Die Vorsicht braucht nicht übertrieben zu werden. Gegen die Festlegung eines Diskontsatzes von 4 % dürfte in absehbarer Zeit nichts einzuwenden sein; doch soll in den Beispielen* nur mit einem Diskont von 3½ % gerechnet werden.

Des weiteren bedarf es noch einer Bemerkung über die Anwendung der Sterblichkeitstafel.

Die schon mehrfach erwähnte Tafel der 23 deutschen Gesellschaften gilt für die Versicherung auf den Todesfall. Es ist ohne weiteres klar, daß dieselbe Tafel für die Versicherung auf den Lebensfall eigentlich nicht angewendet werden sollte. Denn Personen, für die eine Versicherung auf den Lebensfall abgeschlossen werden soll, sind zweifellos gute Lebenswagnisse. Wenn solche Personen sich nicht sehr gesund fühlten und nicht überhaupt zu der Annahme Grund hätten, daß sie den Auszahlungstermin mit großer Wahrscheinlichkeit erleben werden, so würden sie gewiß darauf verzichten, Einlagen zu leisten, die bei vorzeitigem Ableben

*) Die Beispiele sind niedergelegt in der besonderen „Aufgabensammlung“, die sich dem vorliegenden Lehrbuch im einzelnen genau anschließt.

ohne Gegenleistung verloren gehen. Für derartige Wagnisse müßte also eigentlich eine besondere Sterblichkeitstafel angewendet werden.

Bedient man sich der Bequemlichkeit halber auch für die Versicherung auf den Lebensfall einer Sterblichkeitstafel, die regelrecht für die Todesfallversicherung gilt, so muß man die Barwerte oder die daraus berechneten Prämien nachträglich dadurch verwendbar machen, daß man sie mit einem bestimmten Zuschlag versieht, der natürlich mehr oder minder willkürlich gewählt sein wird.

Ist die Versicherung auf den Lebensfall, wie das häufig vorkommt, nur als Zusatzversicherung zu einer Versicherung auf den Todesfall abgeschlossen, derart also, daß die Todesfallversicherung die Grundversicherung ist und daß sich die Wagnisse wenigstens im großen und ganzen im Sinne der Todesfallversicherung selbst auswählen, so kann die für die Todesfallversicherung geltende Sterblichkeitstafel unbedenklich auch für die Zusatzversicherung auf den Lebensfall angewendet werden. In dieser Form kommt die Versicherung auf den Lebensfall als „Bonifikationszusatzversicherung" sogar ziemlich häufig vor.

Bedient man sich für die Versicherung auf den Lebensfall der Sterblichkeitstafel der 23 deutschen Gesellschaften zum Diskontsatz von 3½ %, so genügt ein Aufschlag von 5 %, wenn die Versicherung als Zusatzversicherung (Bonifikationsversicherung) abgeschlossen wird. Soll die Versicherung auf den Lebensfall dagegen die Grundversicherung sein, so muß mit einem höheren Aufschlage gerechnet werden. Bei mäßigen Verwaltungskosten dürfte ein Aufschlag von 10 % bis 15 % im allgemeinen ausreichen.

II. Die Leibrentenversicherung.

a) Renten mit sofort beginnendem Rentenlauf.

Werden Versicherungen auf den Lebensfall in der Weise abgeschlossen, daß nicht nur ein einziges Mal nach einer

bestimmten Anzahl von Jahren die Versicherungssumme fällig wird, sondern daß die Zahlungen periodisch wiederkehren, so liegt eine Rentenversicherung vor. Für die Berechnung des Barwertes, also der einmaligen Nettoeinlage, gilt als Periode gewöhnlich das Jahr.

Im Gegensatz zu dem bereits behandelten Barwert von Zeitrenten bezeichnet man die einmalige Nettoeinlage einer solchen vom Leben abhängigen Rente genauer als den Barwert der Leibrente.

Aus der Erklärung geht ohne weiteres hervor, daß der Barwert einer Leibrente nichts anderes ist als die Summe von Barwerten der Versicherung auf den Lebensfall.

Soll die Summe 1 zum ersten Male nach einem Jahre, alsdann nach einem weiteren Jahre usw., immer unter der Voraussetzung, daß der Versicherte die Zahlungstermine erlebt, bis zum Ableben des Versicherten ausgezahlt werden, so ist, wenn der Rentenbarwert mit a_x bezeichnet wird, zunächst:

$$(40^{\underline{a}})\qquad a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots\ldots + {}_{\omega-x}E_x\,.$$

Mit ω ist dabei das höchste in der Sterbetafel vorkommende Lebensalter bezeichnet; $(\omega - x)$ ist dann also das letzte Versicherungsjahr, das nach der zugrunde gelegten Sterbetafel überhaupt in Frage kommen kann. Man verzichtet jedoch meist darauf, in Reihen, die bis ans Ende der Sterblichkeitstafel ausgedehnt werden sollen, das letzte Glied besonders anzugeben. Ist also die Fortsetzung einer Reihe durch Punkte angedeutet, so soll damit gesagt sein, daß die einzelnen Glieder bis ans Ende der Sterblichkeitstafel weiterzuführen sind. Es genügt also, zu schreiben:

$$(40^{\underline{b}})\qquad a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots\ldots,$$

woraus dann folgt:

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots\ldots\;,$$

$$a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\ldots}{D_x}\;.$$

Für die Summen der Werte D_x, die man tabellarisch zu berechnen pflegt, hat man dann das einfache Symbol

$$\Sigma D_x = N_x$$

eingeführt. Die Werte D sind dabei bis ans Ende der Sterblichkeitstafel zu summieren.

In der Sterbetafel der 23 deutschen Gesellschaften ist zum Beispiel $\omega = 90$ und dieser Annahme gemäß $l_\omega = 0$. Alsdann ist:

$$N_{89} = \Sigma D_{89} = D_{89} = 66{,}23162\ ,$$
$$N_{88} = \Sigma D_{88} = D_{88} + D_{89} = 156{,}1940\ ,$$
$$N_{87} = \Sigma D_{87} = D_{87} + D_{88} + D_{89} = 277{,}6846\ ,$$

u. s. w.

In dem für a_x gefundenen Ausdruck ist nunmehr:

$$D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\ldots = \Sigma D_{x+1} = N_{x+1}\ .$$

Also ergibt sich die Formel:

$$(40^{\underline{c}})\qquad a_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} = \frac{N_{x+1}}{D_x}\ .$$

Die Rente wird zum ersten Male nach einem Jahre fällig; es handelt sich also um eine nachschüssige (postnumerando zu zahlende) Leibrente. Rentenversicherungen mit sofort beginnendem Rentenlauf werden fast stets als nachschüssige Renten abgeschlossen. Es steht jedoch dem nichts im Wege, eine solche Versicherung auch als vorschüssige (pränumerando zu zahlende) Rente abzuschließen. Es ist dann einfach noch der Wert der sofort auszuzahlenden Summe 1 zum Barwert der nachschüssigen Rente hinzuzufügen.

Man bezeichnet den Barwert der vorschüssigen Leibrente mit a_x und hat also:

$$(40^{\underline{d}})\qquad \mathrm{a}_x = a_x + 1\ ,$$

$$\mathrm{a}_x = \frac{D_x}{D_x} + a_x\ ,$$

$$\mathrm{a}_x = \frac{D_x + \Sigma D_{x+1}}{D_x}\ ,$$

$$D_x + \Sigma D_{x+1} = \Sigma D_x\ .$$

$$(40\underline{e})\qquad a_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}\ .$$

Obwohl der Barwert der vorschüssigen Leibrente als Barwert einer regelrechten Versicherung nur äußerst selten vorkommt, ist doch gerade dieser Barwert in der Versicherungsrechnung von größter Wichtigkeit. Die Barwerte vorschüssig zu zahlender Renten bilden geradezu die Grundlage der modernen Versicherungsrechnung; und es gibt kaum eine Formel, die sich nicht schließlich durch Rentenbarwerte ausdrücken ließe. Davon wird später noch die Rede sein.

Es wäre noch darauf hinzuweisen, daß neben der hier angewendeten (deutschen) Bezeichnungsweise der Summe ΣD lange Zeit hindurch noch die ältere (englische) Bezeichnungsweise gebräuchlich gewesen ist, die aus der Praxis der deutschen Versicherungsanstalten nahezu verschwunden sein dürfte. In der englischen Bezeichnungsweise ist:

$$\Sigma D_x = \mathcal{N}_{x-1}\ , \qquad \text{also}$$

$$\Sigma D_{x+1} = \mathcal{N}_x\ ;$$

und es ergeben sich in dieser Bezeichnungsweise die Formeln:

$$(40\underline{f})\qquad \mathit{a}_x = \frac{\mathcal{N}_x}{D_x}\ ,$$

$$(40\underline{g})\qquad a_x = \frac{\mathcal{N}_{x-1}}{D_x}\ .$$

Für die deutsche Versicherungsrechnung hat diese Bezeichnungsweise nur noch geschichtlichen Wert. Sie ist wohl darauf zurückzuführen, daß für die Versicherung einer Leibrente, für die die Barwerte nachschüssiger Renten die Regel sind, ein einfaches Symbol gewonnen werden sollte. Die deutsche Bezeichnungsweise ist demgegenüber trotzdem vorteilhafter, weil, wie bereits hervorgehoben, die Barwerte der vorschüssigen Renten weit wichtiger sind als die der nachschüssigen Renten.

Für die immerhin nicht gerade seltenen Rentenversicherungen mit sofort beginnendem Rentenlauf werden im allgemeinen Sterblichkeitstafeln verwendet werden, die auf Erfahrungen aufgebaut sind, wie sie von den Rentenanstalten gesammelt worden sind.

Verwendet man beim Studium der Versicherungsrechnung, bei dem es doch zunächst mehr darauf ankommt, die Rechnungsformen an sich kennen zu lernen, der Bequemlichkeit halber auch für die Rentenversicherung eine Sterblichkeitstafel, die eigentlich nur für Todesfallversicherungen Geltung hat, also zum Beispiel die Tafel der 23 deutschen Gesellschaften, so muß man sich dabei dessen bewußt bleiben, daß das eigentlich nicht richtig ist. Will man erreichen, daß die gefundenen Werte von den Werten nicht allzusehr abweichen, die man mit Hilfe einer Rententafel erhielte, so kann man auch hier den zunächst gefundenen Werten willkürlich noch einen besonderen Aufschlag hinzufügen. Handelt es sich um Versicherungen auf das Leben männlicher Personen, so wird ein Sicherheitsaufschlag von $7\frac{1}{2}$ % etwa das Richtige treffen. Daneben wäre dann noch für Verwaltungskosten ein Aufschlag von vielleicht 5 % hinzuzurechnen, sodaß im ganzen ein Aufschlag von $12\frac{1}{2}$ % als hinreichend angesehen werden kann. Handelt es sich dagegen um Rentenversicherungen auf das Leben weiblicher Personen, so reicht auch dieser Aufschlag noch nicht aus. Denn die Erfahrung lehrt, daß die Rentnerinnen in den hauptsächlich vorkommenden Altersklassen eine merklich geringere Sterblichkeit aufweisen als die Rentner. Gerade aus diesem Grunde muß für die Berechnung eines Tarifes unter allen Umständen eine besondere Sterbetafel verwendet werden, und zwar eine Tafel, die für Männer und Frauen verschiedene Sterblichkeitssätze aufweist. Behielte man auch für die Rentenversicherung die Tafel der 23 deutschen Gesellschaften bei, so müßte man für die Versicherung auf das Leben weiblicher Personen den Sicherheitsaufschlag etwa auf das Doppelte erhöhen, sodaß dann im ganzen ein Zuschlag von 20 % am Platze wäre.

b) **Renten mit aufgeschobenem Rentenlauf.**

Die Rentenversicherung mit aufgeschobenem Rentenlauf kommt als selbständige Versicherung in der Praxis nicht so häufig vor wie die Form der sofort beginnenden Leibrente; sie steht aber an zweiter Stelle und verdient mehr Beachtung, als ihr gewöhnlich zuteil wird. Denn die Versicherung einer aufgeschobenen Rente ist wirtschaftlich die zweckmäßigste Form der Altersfürsorge. Ihrem Charakter nach steht sie der Versicherung auf den Erlebensfall am nächsten. Gemeinsam hat sie mit ihr die Festsetzung einer Wartefrist, mit dem Unterschiede jedoch, daß in der reinen Versicherung auf den Lebensfall die Wartefrist mit der Versicherungsdauer selbst zusammenfällt, daß also bei dieser Versicherung sofort die volle Gegenleistung fällig wird, wenn der Versicherte den Endtermin der Wartefrist erlebt hat, während bei jener Versicherung die Gegenleistung alsdann weiterhin auf eine im voraus noch nicht bekannte Anzahl von Jahren verteilt wird. Für den Versicherungsnehmer ist demgemäß die Gefahr, daß ein mehr oder minder großer Teil der Einlage verloren gehen könnte, bei der Versicherung einer aufgeschobenen Rente noch größer als bei der Versicherung auf den Erlebensfall, während sich anderseits aber für den, der lange am Leben bleibt, ein entsprechend höheres Erträgnis ergibt. Es ist anzunehmen, daß sich zur Versicherung einer aufgeschobenen Rente nur solche Personen melden werden, die zu der Annahme Grund haben, daß ihnen voraussichtlich ein langes Leben beschieden sein wird. Die Selbstauswahl der Versicherten wird daher zum mindesten ebenso stark sein wie bei der gewöhnlichen Rentenversicherung. Es gilt also für die Wahl der Grundlagen und der Bemessung der Zuschläge etwa dasselbe, was für die Versicherung sofort beginnender Renten angeführt worden ist.

Die Formel für die Versicherung einer aufgeschobenen Rente ist von der Formel für die Versicherung einer sofort beginnenden Rente nicht wesentlich verschieden. Der Unterschied liegt nur darin, daß die erste Rente nicht nach 1 Jahre,

sondern erst nach n Jahren fällig wird, daß also die Summe der einzelnen Versicherungen auf den Lebensfall nicht mit dem Barwert ${}_1E_x$, sondern erst mit dem Barwert ${}_nE_x$ beginnt.

Zu beachten ist, daß aufgeschobene Renten im allgemeinen als vorschüssige Renten vorkommen. Wenigstens wäre es bei ganzjähriger Rentenzahlung widersinnig, von nachschüssigen aufgeschobenen Renten zu sprechen. Denn wenn eine n Jahre hindurch aufgeschobene Rente als nachschüssige Rente laufen sollte, so wäre das nichts anderes als eine $(n+1)$ Jahre aufgeschobene vorschüssige Rente. In der Praxis scheint sich denn auch ziemlich allgemein die Auffassung durchzusetzen, daß eine aufgeschobene Rente, selbst wenn sie unterjährig gezahlt wird, als vorschüssige Rente abzuschließen sei, daß also die erste Rente oder Rentenrate sofort fällig werden müsse, wenn die Aufschubsfrist abläuft.

Wird für den Barwert der aufgeschobenen Rente das Symbol ${}_{n|}a_x$ gewählt, so ist also, wenn die erste Rente im Erlebensfalle nach n Jahren fällig werden soll:

$${}_{n|}a_x = {}_nE_x + {}_{n+1}E_x + {}_{x+2}E_x + \ldots\ldots ,$$

$${}_{n|}a_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{D_{x+n+1}}{D_x} + \frac{D_{x+n+2}}{D_x} + \ldots\ldots ,$$

(41a) $${}_{n|}a_x = \frac{\Sigma D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_x} .$$

Auf eines ist besonders zu achten: wollte man eine nachschüssig zu zahlende aufgeschobene Rente festlegen, so wäre:

(41b) $${}_{n|}\mathit{a}_x = {}_{n+1|}a_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x} .$$

An sich wäre hiergegen nichts einzuwenden. Der Unterschied der Barwerte ist dann aber nicht gleich 1, wie das bei der sofort beginnenden Rente auf Lebenszeit der Fall ist. Es ist vielmehr:

(42) $${}_{n|}a_x - {}_{n|}\mathit{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} - \frac{N_{x+n+1}}{D_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x .$$

Wie noch an anderer Stelle gezeigt werden wird, ist es sehr wichtig, sich darüber klar zu sein.

c) Renten mit abgekürztem Rentenlauf.

Leibrentenversicherungen mit abgekürztem Rentenlauf kommen als Grundversicherungen in der Praxis nur ganz vereinzelt vor, meist nur in der Form der Alimentationsversicherung. Im allgemeinen hat es keinen Sinn, eine Leibrentenversicherung in der Weise abzuschließen, daß nach einer bestimmten Anzahl von Jahren die Rentenzahlung unbedingt ihr Ende erreicht.

Wird eine Rente mit abgekürztem Rentenlauf als nachschüssige Rente versichert, so ist die erste Rente nach einem Jahre, die letzte Rente nach n Jahren auszuzahlen. Wählt man für den Barwert einer solchen Rente das Symbol $|_n a_x$ so ist:

$$|_n a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \ldots\ldots + {}_nE_x \,,$$

$$|_n a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{D_{x+n}}{D_x} \,.$$

Die Werte D sind hier nicht bis ans Ende der Sterblichkeitstafel zu summieren, sondern nur bis zu dem Wert D_{x+n}. Der Wert D_{x+n} selbst ist in der Summe noch enthalten. Man bildet die Summe, indem man zunächst bis ans Ende der Sterblichkeitstafel summiert und alsdann das wieder abzieht, was man zu viel genommen hat. Es ist also:

$$|_n a_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} - \frac{\Sigma D_{x+n+1}}{D_x} \,,$$

$$(43^{\underline{a}}) \quad |_n a_x = \frac{\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+n+1}}{D_x} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x} \,.$$

Zu beachten ist, daß im ganzen n Jahresrenten auszuzahlen sind, was in der Formel dadurch zum Ausdruck kommen muß, daß der Unterschied der beiden im Zähler auftretenden Indices den Wert n ergibt.

Bildet man entsprechend den Barwert der vorschüssig zu zahlenden Rente, so erhält man:

$$ {}_{|n}\mathrm{a}_x = {}_0E_x + {}_1E_x + {}_2E_x + \ldots\ldots + {}_{n-1}E_x \,, $$

$$ {}_{|n}\mathrm{a}_x = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} \,. $$

$$ (43^{\underline{b}}) \qquad {}_{|n}\mathrm{a}_x = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n}}{D_x} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \,. $$

Die hier gegebene Formel für den Barwert der vorschüssig zu zahlenden abgekürzten Leibrente ist eine der wichtigsten und am häufigsten vorkommenden Formeln der Lebensversicherung. Es wird dem Barwert daher der bequemeren Schreibung wegen meist das Symbol $\mathrm{a}_{x,\overline{n}|}$ gegeben. Es soll ausdrücken, daß die Rente bis zum Ableben des $x$jährigen, höchstens jedoch n Jahre hindurch am Anfang eines jeden Jahres fällig werden soll.

Auch hier ist wieder zu beachten, daß der Unterschied zwischen dem Barwert der vorschüssigen und dem Barwert der nachschüssigen Rente nicht gleich 1 ist. Es ist vielmehr:

$$ (44) \qquad \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} - a_{x,\overline{n}|} = \frac{D_x - D_{x+n}}{D_x} = 1 - {}_nE_x \,. $$

Die abgekürzte Rente, die bisweilen auch als temporäre Rente bezeichnet wird, kann auch dargestellt werden als Differenz der lebenslänglichen und der aufgeschobenen Rente. Mittelbar ist dieses Verfahren bei der Entwicklung der Formel ohnehin angewendet worden. Wendet man das Verfahren unmittelbar an, so ist:

$$ (45^{\underline{a}}) \qquad \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} = \mathrm{a}_x - {}_{n|}\mathrm{a}_x \,. $$

Es ist dann also auch:

$$ (45^{\underline{b}}) \qquad {}_{n|}\mathrm{a}_x = \mathrm{a}_x - \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} \qquad \text{und} $$

$$ (45^{\underline{c}}) \qquad \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} + {}_{n|}\mathrm{a}_x = \mathrm{a}_x \,. $$

Zieht man die Formeln (42) und (44) mit heran, so findet man außerdem:

$$ \begin{aligned} \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} &= a_{x,\overline{n}|} + 1 - {}_nE_x \\ {}_{n|}\mathrm{a}_x &= {}_{n|}a_x + {}_nE_x \\ \hline \mathrm{a}_x &= a_x + 1 \,, \end{aligned} $$

was zu erwarten war.

Wird eine Rente mit abgekürztem Rentenlauf als Versicherung abgeschlossen, so ist die Wahl der Sterblichkeitstafel im allgemeinen nur von geringer Bedeutung. Die Barwerte unterscheiden sich nach den einzelnen Tafeln nur wenig von einander. Bei mäßigen Verwaltungskosten genügt für eine solche Versicherung ein Aufschlag von 5% meist selbst dann, wenn eine Tafel verwendet wird, die eigentlich für die Todesfallversicherung Geltung hat.

d) Renten mit aufgeschobenem und gleichzeitig abgekürztem Rentenlauf.

Es kommt bisweilen vor, daß eine Rente mit aufgeschobenem Rentenlauf gleichzeitig als abgekürzte Rente versichert wird. Eine solche Versicherung wird dann gewöhnlich als Stipendienversicherung abgeschlossen.

Ist zunächst eine Wartefrist von m Jahren bedungen, und soll die Rente dann n Jahre hindurch vorschüssig gezahlt werden, so ist:

$$_{m|n}a_x = {}_mE_x + {}_{m+1}E_x + {}_{m+2}E_x + \ldots\ldots + {}_{m+n-1}E_x ,$$

also:

$$(46) \qquad _{m|n}a_x = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{D_x} .$$

Auch hier macht die Wahl der Sterbetafel nur wenig aus. Da es sich aber immerhin um die Versicherung einer aufgeschobenen Rente handelt, so wird man, wenn man sich einer für die Todesfallversicherung bestimmten Tafel bedient, vorsichtshalber mit einem Aufschlag von vielleicht 10 % rechnen, der bei mäßigen Verwaltungskosten wohl ausreichen dürfte.

III. Die Kapitalversicherung auf den Todesfall.

Die Kapitalversicherung auf den Todesfall wird meist nur auf Grund einer vorhergegangenen vertrauensärztlichen Untersuchung oder einer sonstigen Gesundheitsprüfung abgeschlossen. Die dadurch von der Gesellschaft selbst geschaffene Auslese bezeichnet man als Selektion. Eine solche Selektion liegt auch vor, wenn auf die Untersuchung verzichtet wird. Denn auch in diesem Falle trifft die Gesellschaft ihre Entscheidung über die Annahme oder die Ablehnung des Antrages nach sorgfältiger Prüfung der in der Antragserklärung enthaltenen Antworten des Antragstellers; vielfach werden auch Hausärzte oder andere Aerzte wegen des Gesundheitszustandes der zu versichernden Person um Auskunft ersucht. Jedenfalls wird der ziemlich starken Selbstauswahl des Antragstellers, die man auch als Antiselektion zu bezeichnen pflegt, in der Todesfallversicherung sehr sorgfältig begegnet, während das in der Rentenversicherung nicht gut angeht.

a) Die Todesfallversicherung auf Lebenszeit.

Die älteste Form der Kapitalversicherung auf den Todesfall ist die Versicherung auf Lebenszeit. Das versicherte Kapital wird nur beim Ableben fällig. Die einmalige Nettoeinlage für eine solche Versicherung entspricht, wie noch gezeigt werden wird, im umgekehrten Sinne dem Barwert einer lebenslänglichen Leibrente.

Die Formel entwickelt man ähnlich wie die Formel für die Leibrente. Dabei wird man zunächst auf einen sehr wichtigen Begriff geführt, der in dem Barwert der einfachen Todesfallversicherung enthalten ist, nämlich auf den Begriff der reinen Wagnisprämie (Risikoprämie), der auch an anderer Stelle noch Gegenstand der Erörterung sein wird. Wenn der xjährige schon im ersten Versicherungs-

jahre stirbt, so wird sofort die Versicherungssumme fällig, auch wenn davon bei laufender Prämienzahlung nur ein geringer Teil als Prämie eingezahlt worden ist. Welches ist nun die einmalige Einlage dafür, daß die Gesellschaft ein Jahr hindurch das Wagnis trägt?

Es entsteht da zunächst die Frage nach dem genauen Zeitpunkte des Ablebens. Dieser Zeitpunkt ist allerdings unbekannt; wenn es sich aber um eine große Anzahl von Versicherten handelt, dann kann angenommen werden, daß sich die Todesfälle gleichmäßig über das ganze Jahr hin verteilen. In seiner Wirkung ist das dann dasselbe, wie wenn alle Personen gerade in der Mitte des Jahres stürben, wenigstens dann, wenn alle Versicherungssummen einander gleich sind. Da von allen Annahmen, die überhaupt denkbar wären, die Annahme, daß sich auch die Unterschiede der Versicherungssummen ausgleichen und daß sich die Todesfälle gleichmäßig über das Jahr hin verteilen, immer noch am vernünftigsten ist, so geht man in der Theorie tatsächlich zunächst von dieser Annahme aus und setzt dabei stillschweigend voraus, daß sich alle Abweichungen gegenseitig ausgleichen werden.

Wenn aber die Rechnung so gestaltet werden soll, wie wenn alle Summen genau in der Mitte des Jahres auszuzahlen wären, so hat die der Einheit gleichzusetzende Versicherungssumme zu Beginn des Jahres den Wert

$$\frac{1}{(1+i)^{\frac{1}{2}}} = v^{\frac{1}{2}} = \sqrt{v}\,,$$

falls es sich um eine Todesfallsumme handelt. Man weiß aber doch noch nicht, ob die Summe auszuzahlen sein wird oder nicht; die Summe wird vielmehr nur mit der Wahrscheinlichkeit fällig, daß der xjährige im Laufe des Jahres stirbt. Der Barwert der nur für ein einziges Jahr geltenden Todesfallversicherung ist also ausgedrückt durch das Produkt:

$$v^{\frac{1}{2}} \cdot q_x = v^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{d_x}{l_x}\ .$$

Für die Formelbildung erweist sich jedoch eine andere Annahme als vorteilhafter, die Annahme nämlich, daß alle Todesfallsummen erst am Schlusse des Jahres auszuzahlen seien. Der damit begangene Fehler spielt keine Rolle. Denn erstens sehen die Versicherungsbedingungen für die Auszahlung der Sterbfallsummen oft eine gewisse Wartezeit vor, derart daß die Gesellschaft die Sterbfallsumme erst innerhalb eines allerdings kurz bemessenen Zeitraums auszuzahlen braucht, zweitens wirkt die vorzeitige Auszahlung doch nur verringernd auf den rechnerisch ohnehin zu niedrig angesetzten Durchschnittszins, und drittens genügte ein verhältnismäßig geringfügiger Aufschlag, den Fehler wieder auszugleichen, wenn sich das wirklich einmal als unumgänglich notwendig erweisen sollte. Jedenfalls ergeben sich aus der Annahme, daß die Sterbfallsummen ausnahmslos am Ende des Versicherungsjahres zu zahlen seien, für die Gestaltung der Formeln so wesentliche Vorteile, daß es nicht zu verstehen wäre, wenn man lediglich der Theorie zuliebe auf diese Vorteile verzichten wollte. Es mag also angenommen werden, daß für jede einzelne Versicherung das Kapital 1, selbst wenn der Versicherte schon im Laufe des Jahres gestorben ist, doch stets erst am Schlusse des Jahres auszuzahlen sei. Am Anfang des Jahres hat die im ersten Versicherungsjahr fällig werdende Summe dann den Wert v; und da die Summe nur mit der Wahrscheinlichkeit q_x fällig wird, so ergibt sich als Barwert das Produkt:

$$v \cdot q_x = v \cdot \frac{d_x}{l_x} ,$$

das auch wieder in anderer Weise gefunden werden kann. Bezeichnet man nämlich den Barwert der nur für ein einziges Jahr geltenden Todesfallversicherung mit Π_x, so erhält die Gesellschaft, wenn l_x Personen eine solche Versicherung eingehen, insgesamt die Einlage $l_x \cdot \Pi_x$, die sie ein Jahr hindurch verzinsen kann. Der aufgezinsten Leistung, die dann den Wert $l_x \cdot \Pi_x \cdot (1+i)$ aufweist, muß gleich sein die Gegenleistung, die darin besteht, daß für

d_x Versicherungen je die Summe 1 ausgezahlt wird. Es ist dann also:

$$l_x \cdot \Pi_x (1+i) = d_x ,$$

$$\text{(47a)} \qquad \Pi_x = \frac{1}{(1+i)} \cdot \frac{d_x}{l_x} = v \cdot \frac{d_x}{l_x} .$$

Man bezeichnet diese Prämie als die „natürliche Prämie“ oder schlechthin auch einfach als die Risikoprämie.

Erweitert man die rechte Seite wieder mit v^x, so erhält man:

$$\Pi_x = v \cdot \frac{v^x}{v^x} \cdot \frac{d_x}{l_x} = \frac{v^{x+1} \cdot d_x}{v^x \cdot l_x} = \frac{v^{x+1} \cdot d_x}{D_x} .$$

Im Nenner ergibt sich wieder die bereits bekannte diskontierte Zahl der Lebenden. Der Zähler weist eine Form von Produkten auf, für die man ebenfalls ein Symbol eingeführt hat: das Symbol C. Man setzt nämlich:

$$\begin{aligned} C_0 &= v \cdot d_0 , \\ C_1 &= v^2 \cdot d_1 , \\ C_2 &= v^3 \cdot d_2 , \\ &\cdots\cdots \\ C_K &= v^{K+1} \cdot d_K , \\ &\cdots\cdots \\ C_x &= v^{x+1} \cdot d_x , \\ C_{x+n} &= v^{x+n+1} \cdot d_{x+n} \end{aligned}$$

u. s. w.

Mit Hilfe dieses neuen Symbols erhält man dann die Formel:

$$\text{(47b)} \qquad \Pi_x = \frac{C_x}{D_x} .$$

Die natürliche Prämie, also die nur für ein einziges Jahr geltende Wagnisprämie, entspricht etwa der in der Sachschadenversicherung üblichen Jahresprämie. Wird die natürliche Prämie mit einem angemessenen Sicherheitsaufschlage sowie mit einem Aufschlage für Verwaltungskosten versehen, so kann danach auf die Dauer eines Jahres eine

Todesfallversicherung abgeschlossen werden. Ist das eine Jahr zu Ende, so gilt die Prämie als verbraucht. Soll die Versicherung dann also fortgesetzt werden, so ist für das nächste Jahr die entsprechende natürliche Prämie des höheren Alters zu zahlen. Für die niedrigen Altersklassen sind derartige Prämien verhältnismäßig gering, und selbst für die mittleren Altersklassen sind sie im allgemeinen erträglich, auch wenn mit einem Aufschlage von 25 bis 50 % gerechnet wird. Der Aufschlag muß selbstverständlich je nach der Wahl der Sterblichkeitstafel bedeutenden Schwankungen unterliegen. Wird mit der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften gerechnet, so kann ein Aufschlag von 25 % im Mittel als ausreichend angesehen werden. Bei Tafeln dagegen, die geringe Sterbenswahrscheinlichkeiten aufweisen, muß der Aufschlag höher sein, weil die Höhe der Prämie fast ausschließlich von der Höhe der Sterbenswahrscheinlichkeit bestimmt wird.

In Deutschland kommt die Versicherung zur natürlichen Prämie nur ganz vereinzelt vor. Etwas häufiger ist sie von den skandinavischen und den amerikanischen Gesellschaften angewendet worden. Einen gewissen Anreiz übt die Tatsache aus, daß die Prämien zunächst ziemlich niedrig ausfallen. Wenn der Versicherte dann aber allmählich in die höheren Altersklassen aufrückt und die Versicherung von Jahr zu Jahr erneuert werden soll, so besteht die Gefahr, daß die Versicherung schließlich nicht weitergeführt werden kann, weil die Prämie geradezu unerschwinglich wird, und zwar gerade dann, wenn der Versicherte in besonderem Maße des Versicherungsschutzes bedarf.

Die Summe einer Reihe aufeinander folgender natürlicher Prämien hat in der Versicherungsrechnung keine Bedeutung. Mit einem Ausdruck von der Form:

$$S = \Pi_x + \Pi_{x+1} + \Pi_{x+2} + \dots\dots$$

wäre also nichts anzufangen. Eine ähnliche Form ergibt sich aber, wenn die Wagnisprämie stets auf das Eintrittsalter bezogen wird, und wenn dabei jede einzelne der Ein-

heit gleiche Versicherungssumme entsprechend abgezinst wird. Es ist nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Versicherte gerade im ersten Jahre stirbt: ${}^1q_x = d_x : l_x$,
„ „ zweiten „ „ ${}^2q_x = d_{x+1} : l_x$,
„ „ dritten „ „ ${}^3q_x = d_{x+2} : l_x$
u. s. w.

Angenommen also, der Versicherte stürbe gerade im ersten Jahre, so wäre im Zeitpunkte des Abschlusses zur Auszahlung der Summe 1 der Betrag v zurückzustellen. In Wirklichkeit ist aber nur der Betrag $v \cdot {}^1q_x = v \cdot \frac{d_x}{l_x}$ erforderlich, weil der Versicherte nur mit der Wahrscheinlichkeit ${}^1q_x$ gerade im ersten Jahre stirbt. Angenommen ferner, der Versicherte stürbe gerade im zweiten Jahre, so wäre im Zeitpunkte des Abschlusses zur Auszahlung der Summe 1 der Betrag v^2 zurückzustellen. In Wirklichkeit ist aber nur der Betrag $v^2 \cdot {}^2q_x = v^2 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x}$ erforderlich, weil der Versicherte nur mit der Wahrscheinlichkeit ${}^2q_x$ gerade im zweiten Jahre stirbt. Setzt man die Reihe in dieser Weise fort, so erhält man den Betrag, der erforderlich ist, wenn für alle Jahre, die nach der Sterblichkeitstafel überhaupt in Frage kommen können, die Deckung des Wagnisses übernommen werden soll; man erhält dann also den Barwert der auf Lebenszeit geltenden Todesfallversicherung. Bezeichnet man diesen Barwert mit A_x, so ist:

$$A_x = v \cdot {}^1q_x + v^2 \cdot {}^2q_x + v^3 \cdot {}^3q_x + \ldots\ldots ,$$

$$A_x = v \cdot \frac{d_x}{l_x} + v^2 \cdot \frac{d_{x+1}}{l_x} + v^3 \cdot \frac{d_{x+2}}{l_x} + \ldots\ldots ,$$

$$A_x = \frac{v^{x+1} \cdot d_x}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+2} \cdot d_{x+1}}{v^x \cdot l_x} + \frac{v^{x+3} \cdot d_{x+2}}{v^x \cdot l_x} + \ldots\ldots ,$$

$$(48\underline{a})\quad A_x = \frac{C_x}{D_x} + \frac{C_{x+1}}{D_x} + \frac{C_{x+2}}{D_x} + \ldots\ldots = \frac{\Sigma C_x}{D_x} .$$

Ebenso nun, wie man für die Summen der Werte D, die man tabellarisch hergestellt hat, das neue Symbol N ein-

geführt hat, hat man auch für die Summen der Werte C ein neues Symbol M eingeführt. Es ist also:

$$C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \ldots\ldots + C_\omega = \Sigma C_x = M_x \,.$$

Mit Hilfe dieses neuen Symbols erhält man dann für den Barwert der lebenslänglichen Kapitalversicherung auf den Todesfall die einfache Formel:

$$(48\underline{b}) \qquad A_x = \frac{M_x}{D_x} \,.$$

Will man nachträglich berücksichtigen, daß die Sterbfallsummen rechnungsmäßig zwar stets am Ende des Jahres, praktisch jedoch schon im Laufe des Jahres und zwar im Mittel in der Mitte des Jahres als fällig angesehen werden können, so braucht man sich nur zu vergegenwärtigen, daß man in der Formel jeden Summanden um ein halbes Jahr zuviel diskontiert hat. Man kann das dadurch wieder rückgängig machen, daß man nachträglich den Zähler mit

$$\frac{1}{\sqrt{v}} = \sqrt{1+i} = (1+i)^{\frac{1}{2}}$$

multipliziert. Da nach dem binomischen Lehrsatz:

$$(1+i)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\,i - \frac{1}{8}\,i^2 + \ldots\ldots - \ldots\ldots$$

ist, wobei man das dritte Glied und alle folgenden Glieder als endlich klein gegenüber den beiden ersten Gliedern vernachlässigen kann, so kann man statt $(1+i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+i}$ auch einfach $\left(1 + \frac{1}{2}\,i\right)$ setzen. Die Annäherung ist praktisch fast immer genau genug. Man erhält also den Ausdruck:

$$(48\underline{c}) \qquad \overset{\circ}{A}_x = \frac{M_x}{D_x}\sqrt{1+i} \sim \frac{M_x}{D_x}\left(1 + \frac{1}{2}\,i\right) .$$

Wenn man eine derartige Verbesserung anbringt, so darf man jedoch nicht übersehen, daß sie nur solchen Werten zukommt, in denen Todesfallzahlungen ausgedrückt sind,

oder die sich wenigstens, wenn sie sich schon auf anders geartete Leistungen beziehen, nur auf solche Leistungen beziehen, von denen angenommen ist, sie seien stets am Schlusse des Jahres auszuzahlen, während sie praktisch bereits als in der Mitte des Jahres fällig werdend anzusehen sind. Es sei jedoch wiederholt, daß es im allgemeinen gar nicht nötig ist, auf diese Verschiedenheit der Auszahlung Rücksicht zu nehmen, sofern nur der in der Bruttoprämie enthaltene Aufschlag zum Ausgleich den erforderlichen Spielraum läßt.

b) **Die Todesfallversicherung mit Wartefrist.**

Die Verpflichtung der Gesellschaft, beim Ableben des Versicherten die vereinbarte Versicherungssumme auszuzahlen, kann für eine bestimmte Anzahl von Jahren ausgeschlossen werden. Man bezeichnet einen solchen Zeitraum dann als Wartefrist. Er entspricht der Aufschubsfrist, die für eine Rentenversicherung festgesetzt werden kann. Bisweilen nennt man die Wartefrist oder die Aufschubsfrist auch eine Karenzzeit.

Ist eine Wartefrist bedungen, so wird in den ersten n Jahren von der Gesellschaft kein Wagnis getragen. In der Formel müssen also die ersten n Summanden wegfallen. Bezeichnet man den Barwert einer solchen Versicherung analog der für die Rentenversicherung gewählten Bezeichnung mit ${}_{n|}A_x$, so ist also:

$$ {}_{n|}A_x = \frac{C_{x+n}}{D_x} + \frac{C_{x+n+1}}{D_x} + \frac{C_{x+n+2}}{D_x} + \ldots\ldots $$

$$ {}_{n|}A_x = \frac{\Sigma C_{x+n}}{D_x} = \frac{M_{x+n}}{D_x}\,. \tag{49} $$

Als selbständige Versicherung wird eine solche Versicherung nur sehr selten vorkommen. Denn wenn von der Gesellschaft eine Wartefrist zur Bedingung gemacht wird — bei der Versicherung ohne ärztliche Untersuchung sollte

das regelmäßig geschehen —, so wird trotzdem die Prämie gewöhnlich so berechnet, wie wenn keine Wartefrist bedungen wäre. Es handelt sich dann also nicht um eine rechnerische (um eine sogenannte technische) Wartefrist, sondern um eine medizinische Wartefrist. Was dabei technisch in den Barwert zuviel hineingerechnet ist, das wird als Aufschlag zur Deckung des erhöhten Wagnisses angesehen.

Die Erweiterung der Formel (49) mit dem Faktor $\sqrt{1+i}$ oder $\left(1+\frac{1}{2}i\right)$ ist zulässig.

Es ist zu beachten, daß durchaus nicht etwa die Prämie einer mit Wartefrist abgeschlossenen Versicherung, wenn Jahresprämien entrichtet werden, während der Wartefrist nach Belieben verbraucht werden kann; sie enthält ja das, was späterhin gebraucht wird.

c) Die kurze Todesfallversicherung (Risikoversicherung).

Die Form der kurzen Todesfallversicherung entspricht der Form der abgekürzten Rente. Die Versicherungssumme wird nur fällig, wenn der Versicherte während der festgesetzten Versicherungsdauer von n Jahren stirbt. Ist die Versicherungsdauer abgelaufen, so gilt die Versicherung als beendet, ohne daß weiterhin noch irgendwelche Ansprüche geltend gemacht werden können.

Man kann die Formel in derselben Weise entwickeln wie die Formel für die Versicherung einer abgekürzten Rente. Man hat dann also von dem Barwert der Versicherung auf Lebenszeit einfach abzuziehen den Barwert der Versicherung mit Wartefrist. Bezeichnet man den Barwert der kurzen Todesfallversicherung analog mit $|_n A_x$, so ist mithin einfach:

(50a) $$|_n A_x = A_x - {}_n|A_x \quad ,$$ also

$$|_n A_x = \frac{M_x}{D_x} - \frac{M_{x+n}}{D_x} \; ;$$

und wenn man für $|_n A_x$ das einfachere Symbol $_n A_x$ einsetzt, so erhält man:

$$(50^{\underline{b}})\qquad {}_nA_x = \frac{\Sigma C_x - \Sigma C_{x+n}}{D_x} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}\ .$$

Diese Versicherung kommt als selbständige Versicherung häufiger vor; und zwar wird gerade sie bisweilen zur einmaligen Prämie abgeschlossen, während sonst die zur einmaligen Prämie abgeschlossene Todesfallversicherung als eine Seltenheit anzusehen ist. Die kurze Todesfallversicherung wird mit Vorliebe als „Risikoversicherung" bezeichnet. Sie wird meist nur auf fünf, zehn oder fünfzehn Jahre abgeschlossen.

Der Barwert der Risikoversicherung ist im allgemeinen verhältnismäßig niedrig; er muß daher mit einem reichlichen Aufschlag versehen sein. Wird der Aufschlag nicht technisch abgestuft, so muß er je nach der Wahl der Rechnungsgrundlagen 25 bis 50 % des Barwertes ausmachen. Auch hier kann übrigens der Barwert mit dem Faktor $\sqrt{1+i}$ oder $\left(1+\frac{1}{2}i\right)$ erweitert werden.

IV. Die Versicherung auf den Todes- und den Lebensfall.

Bei weitem die häufigste Form der Versicherung ist die Form der gemischten Versicherung auf den Todes- und den Lebensfall. Sie wird auch als abgekürzte oder als alternative Versicherung bezeichnet. Sie verbindet die Todesfallfürsorge mit der Altersfürsorge; denn das versicherte Kapital wird sofort nach dem Ableben des Versicherten, spätestens jedoch nach einer bestimmten Anzahl von Jahren fällig, wenn der Versicherte alsdann noch am Leben ist. Mit der Auszahlung der Versicherungssumme erreicht

die Versicherung unter allen Umständen ihr Ende. Technisch enthält die Versicherung nichts Neues; es liegt vielmehr einfach eine Verbindung der kurzen Todesfallversicherung mit der reinen Erlebensfallversicherung vor; und es ergibt sich demgemäß für den Barwert der Versicherung ohne weiteres die Formel:

$$(51^{\underline{a}})\qquad A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}\,.$$

Man beachte dabei, daß das Symbol $A_{x,\overline{n}|}$ seine Bedeutung für sich hat, also nicht gleichbedeutend ist mit dem Symbol $|_n A_x$. Gegenüber den Symbolen der Rentenbarwerte liegt hier also zunächst ein Unterschied vor, der aber späterhin noch seine Erklärung finden wird.

Obwohl in der gemischten Versicherung die Versicherung auf den Lebensfall enthalten ist, braucht man doch dafür keine besondere Sterblichkeitstafel, sofern nur als Grundversicherung die Versicherung auf den Todesfall anzusehen ist und sich danach die Antragsteller selbst auswählen. Etwas anderes wäre es, wenn die für den Todesfall festgesetzte Summe von der für den Erlebensfall festgesetzten Summe erheblich abwiche, derart daß die Lebensfallsumme beträchtlich höher wäre als die Todesfallsumme. Dadurch könnte schließlich der Charakter der Versicherung so weit geändert werden, daß die Versicherung auf den Lebensfall besonders stark hervorträte. In der Praxis wird von einer solchen Verschiebung des Wagnisses in geringem Maße Gebrauch gemacht, wenn es sich um die Versicherung von gesundheitlich nicht einwandfreien Personen handelt. Die Festsetzung einer erhöhten Lebensfallsumme bietet da einen durchaus brauchbaren Wagnisausgleich.

Umgekehrt kann auch die Lebensfallversicherung in ihrer Wirkung herabgedrückt werden, indem die Bestimmung getroffen wird, daß nach n Jahren im Erlebensfalle nicht die für den Fall des Ablebens festgesetzte Summe, sondern nur ein bestimmter Teil davon ausgezahlt werden soll.

Ist allgemein die Todesfallsumme gleich 1, die Lebensfallsumme gleich α, wobei $\alpha < 1$ ist, so lautet die Formel für die einmalige Nettoeinlage:

$$(51\underline{b}) \qquad A^{1,\alpha}_{x,\overline{n|}} = \frac{(M_x - M_{x+n}) + \alpha D_{x+n}}{D_x}.$$

Diese Form der Versicherung wird vielfach auch so aufgefaßt, daß man die Lebensfallsumme als die Einheit ansieht. Ist dann die Todesfallsumme gleich $(1+\alpha)$, so ergibt sich ohne weiteres die Formel:

$$(51\underline{c}) \qquad A^{1+\alpha,1}_{x,\overline{n|}} = \frac{(1+\alpha)(M_x - M_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x}.$$

Auch für den zuerst besprochenen Fall läßt sich theoretisch allgemein eine Formel aufstellen. Es ergibt sich nämlich die Gleichung:

$$(51\underline{d}) \qquad A^{1,(1+\alpha)}_{x,\overline{n|}} = \frac{(M_x - M_{x+n}) + (1+\alpha) D_{x+n}}{D_x}.$$

In der Praxis wird statt dessen gewöhnlich die einfache Form der gemischten Versicherung beibehalten und die Erhöhung der Lebensfallsumme durch eine Zusatzversicherung (Bonifikationsversicherung) bewirkt. Es ist dann einfach:

$$(51\underline{e}) \qquad A^{1,(1+\alpha)}_{x,\overline{n|}} = A_{x,\overline{n|}} + \alpha \cdot {}_nE_x \,.$$

Selbstverständlich lassen sich für die Verbindung der kurzen Todesfallversicherung mit der reinen Erlebensfallversicherung noch mancherlei Abarten bilden. Es kann zum Beispiel die Lebensfallsumme unabhängig von der Todesfallsumme nach einem ganz anderen Maßstab bestimmt werden als diese. So kann bestimmt werden, daß die Todesfallsumme gleich der Einheit, die Lebensfallsumme aber dem Gesamtbetrag der für die Versicherung geleisteten Einlagen gleich sein soll. Dieses Verfahren ist zum Beispiel für die Versicherung „minderwertiger Leben" eingeführt worden.

Für die Berechnung des Barwertes ist dann einfach in der Formel (51$\frac{d}{}$) der Faktor $(1+a)$ sinngemäß zu bestimmen.

Die Bonifikationsversicherung wird bisweilen auch der einfachen Kapitalversicherung auf den Todesfall als Zusatzversicherung hinzugefügt. Es wird dann also bestimmt, daß die auf den Lebensfall versicherte besondere Summe (die Bonifikation) a ausgezahlt werden soll, wenn der Versicherte ein bestimmtes Alter erreicht hat, wenn er also nach n Jahren noch am Leben ist. Meist läuft dann gleichzeitig auch die Prämienzahlungsdauer ab. Die Versicherung ist mit der Auszahlung der Bonifikationssumme a dann also nicht beendet, sondern sie läuft über den vollen Betrag der Versicherungssumme prämienfrei weiter bis zum Ableben des Versicherten.

Bisweilen werden auch für bestimmte Zwischenräume kleine Teilsummen auf den Erlebensfall mitversichert. Hauptsächlich geschieht das bei der gemischten Versicherung. Für alle derartigen Fälle sind je nach der besonderen Form des Tarifs die Formeln einzeln aufzustellen, was gewöhnlich keinerlei Schwierigkeit bietet.

Die Versicherung auf den Todes- und den Lebensfall ist außerordentlich anpassungsfähig. So kann zum Beispiel die im Todesfalle auszuzahlende Summe als Rentenkaufssumme verwendet werden, etwa um damit der hinterbliebenen Ehefrau des Versicherten eine lebenslängliche Rente zu sichern. Nötigenfalls kann auch bestimmt werden, daß nur ein Teil der Versicherungssumme dazu zu verwenden sei. Auch die Lebensfallsumme kann als Rentenkaufsumme angelegt werden; der Versicherte kann sich auf diese Weise zum Beispiel für sich selbst eine Altersrente sichern. Nötigenfalls kann die gemischte Versicherung auch leicht durch die Mitversicherung einer Zusatzrente ergänzt werden. Sogar als Ausstattungsversicherung (Aussteuer- oder Militärdienstversicherung) läßt sich die gemischte Versicherung anwenden. Auch bietet sie der Einschließung der Invaliditätsgefahr keine Schwierigkeiten.

8. Kapitel.

Die Versicherung zur laufenden Prämie (Jahresprämie).

Wie bereits betont worden ist, kommen Versicherungen mit einmaliger Einlage nur in der Rentenversicherung regelmäßig vor; in der Todesfallversicherung sind sie äußerst selten. Todesfallversicherungen werden vielmehr fast stets in der Weise abgeschlossen, daß die Prämienzahlung auf eine mehr oder minder lange Reihe von Jahren ausgedehnt wird. Stirbt der Versicherte dann während der bedungenen Prämienzahlungsdauer, so hat die Prämienzahlung selbstverständlich als beendet zu gelten.

Der Barwert aller vom Versicherungsnehmer voraussichtlich zu entrichtenden Prämien muß gleich sein der einmaligen Einlage. Denn die einmalige Einlage ist der Barwert der Versicherung, das heißt also der Barwert aller voraussichtlichen Leistungen des Versicherers; und dieser Barwert muß nach dem Grundsatze der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung gleich sein dem Barwert der voraussichtlichen Leistungen des Versicherungsnehmers, also dem Barwerte der vereinbarten Jahresprämien.

Wenn nun jemand ein Kapital, das er einem anderen schuldet, nicht in einer einzigen Zahlung entrichtet, sondern wenn er statt dessen eine bestimmte Zeit hindurch regelmäßig wiederkehrende Zahlungen leistet, so zahlt er statt des Kapitals eine Rente. Der Barwert der Rente muß dem Werte des geschuldeten Kapitals gleich sein. Dasselbe gilt von der Abtragung einer einmaligen Einlage, also von der Zahlung laufender Prämien.

Der Versicherungsnehmer zahlt also dem Versicherer eine Rente, nämlich die Jahresprämie; es ist das je nach der Form der Versicherung und der Art der Prämienzahlung eine Rente mit längerer oder kürzerer Laufzeit, jedenfalls aber eine Rente, die mit dem Ableben des Versicherten ohne weiteres ihr Ende erreicht, also eine Leibrente.

Theoretisch ließe sich eine Versicherung schließlich auch so denken, daß über den Tod des Versicherten hinaus noch Prämien zu entrichten wären; praktisch ist dieser Fall in der regelrechten Versicherung jedoch ausgeschlossen. Es ist vielmehr eine der wesentlichen Eigentümlichkeiten der Lebensversicherung, daß mit dem Ableben des Versicherten die Prämienzahlung ohne weiteres ihr Ende erreicht. Die reine Zinserträgnisversicherung, die man als Sparversicherung zu bezeichnen pflegt (vgl. das 4. Kapitel), macht hiervon eine Ausnahme.

Wenn nun also der Versicherungsnehmer dem Versicherer eine Rente zahlt, eben jene Rente nämlich, die man als Prämie zu bezeichnen pflegt, so hat diese Rente im Zeitpunkte des Abschlusses der Versicherung einen bestimmten Wert: den Barwert der voraussichtlichen Leistungen des Prämienzahlers.

Die Prämie wird stets vorschüssig gezahlt. Wäre sie gleich der Einheit, so wäre der Barwert aller Prämien einfach gleich dem Barwert der vorschüssigen Rente 1, also gleich dem Barwert $a_{x,\overline{t}|}$, wobei mit t die Anzahl der Jahre bezeichnet ist, auf die die Prämienzahlung ausgedehnt ist. Die Prämie ist aber nicht gleich der Einheit, sondern sie hat einen bestimmten Wert, der mit P_x bezeichnet wird. Der Barwert aller Prämien ist somit gleich dem Produkt $P_x \cdot a_{x,\overline{t}|}$.

Da der Barwert der Prämienleistung dem Barwert der Versicherung gleich sein muß, so ergibt sich also die Gleichung:

$$P_x \cdot a_{x,\overline{t}|} = A_x .$$

Die jeweilige besondere Form der Versicherung ist dabei nicht angegeben. Es kann sich natürlich um jede beliebige Versicherungsform handeln. Verzichtet man in der Grundformel auch darauf, für den Rentenbarwert die besondere Form der Prämienzahlung anzugeben, so erhält man ganz allgemein die Gleichung:

$$P_x \cdot a_x = A_x ,$$ also:

(52) $$P_x = \frac{A_x}{a_x}.$$

Die nach dieser Formel ermittelte Prämie ist die mathematische Nettojahresprämie, die man kurzweg einfach als Nettoprämie zu bezeichnen pflegt. Man erhält also für die Versicherungssumme 1 die Nettojahresprämie, wenn man den Barwert der Versicherung mit dem Barwert der vorschüssig zu zahlenden Leibrente dividiert, wobei beide Barwerte auf die Einheit der Summe zu beziehen sind.

Es ist zu beachten, daß der Zähler des die Nettoprämie ausdrückenden Bruches stets von der Art der Versicherung, der Nenner dagegen stets von der Art der Prämienzahlung abhängig ist. Handelt es sich zum Beispiel um eine Versicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung, was nur sehr selten der Fall sein wird, so ist mit dem Barwert der lebenslänglichen Leibrente zu dividieren. Liegt dagegen abgekürzte Prämienzahlung vor, so ist mit dem Barwert der abgekürzten (temporären) Leibrente zu dividieren.

Damit ist eigentlich schon ohne weiteres die Möglichkeit gegeben, für jede der im vorstehenden besprochenen Formen der Versicherung eine beliebige Jahresprämie zu berechnen. Es seien jedoch der Vollständigkeit halber wenigstens die wichtigsten Formen hier kurz besprochen.

1. Die Versicherung auf den Lebensfall.

Die Prämien werden gewöhnlich während der n jährigen Versicherungsdauer entrichtet. Es ergibt sich also:

(53) $$P_x = \frac{{}_nE_x}{a_{x,\overline{n|}}} = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}.$$

2. Die Versicherung einer sofort beginnenden Leibrente.

Die Zahlung laufender Prämien kann nicht in Frage kommen, da mindestens vom Schlusse des ersten Jahres an schon Renten auszuzahlen sind.

3. Die Versicherung einer aufgeschobenen Rente.

Die Prämien werden gewöhnlich während der njährigen Aufschubsfrist entrichtet. Es ergibt sich also:

$$(54) \qquad P_x = \frac{{}_{n|}a_x}{a_{x,\overline{n}|}} = \frac{N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \,.$$

4. Die Versicherung einer abgekürzten Rente.

Die Zahlung laufender Prämien kann nicht in Frage kommen, da mindestens vom Schlusse des ersten Jahres an schon Renten auszuzahlen sind.

5. Die Versicherung einer aufgeschobenen abgekürzten Rente (einer Stipendienrente).

Die Prämien werden gewöhnlich während der mjährigen Aufschubsfrist entrichtet. Es ergibt sich also:

$$(55) \qquad P_x = \frac{{}_{m|n}a_x}{a_{x,\overline{n}|}} = \frac{N_{x+m} - N_{x+m+n}}{N_x - N_{x+m}} \,.$$

6. Die einfache Kapitalversicherung auf den Todesfall.

Im allgemeinen wird die Prämienzahlungsdauer auf eine bestimmte Anzahl von Jahren abgekürzt; es kann jedoch auf besonderen Wunsch auch bestimmt werden, daß unter allen Umständen bis zum Ableben des Versicherten Prämien zu entrichten sind. Für die lebenslängliche Prämienzahlung ergibt sich dann:

$$(56\underline{a}) \qquad P_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{M_x}{N_x} \,.$$

Diese Prämie wird auch als „Normalprämie“ bezeichnet. Die Bezeichnung ist nicht ganz eindeutig, weil in der Praxis die regelrechte Tarifprämie jeder beliebigen Versicherungsform, also die nicht mit besonderen Gefahrenzu-

schlägen versehene Prämie, bisweilen auch als Normalprämie (normale Prämie) bezeichnet wird.

Die Versicherung auf Lebenszeit mit lebenslänglicher Prämienzahlung ist übrigens zu einer großen Seltenheit geworden. Meist wird wenigstens die Prämienzahlungsdauer auf ein bestimmtes, wenn auch hohes Lebensalter abgekürzt. Wird die Prämienzahlungsdauer zum Beispiel auf das 85. Lebensjahr begrenzt, so ist:

$$P_x^{85} = \frac{M_x}{N_x - N_{85}} . \tag{56b}$$

Wird allgemein eine Prämienzahlungsdauer von t Jahren festgesetzt, so ist:

$$_tP_x = \frac{M_x}{N_x - N_{x+t}} . \tag{56c}$$

7. Die Todesfallversicherung mit Wartefrist.

Die Wartefrist wird meist ziemlich kurz bemessen, sodaß es gewöhnlich nicht möglich und auch garnicht nötig ist, alle Prämien schon während der Wartefrist entrichten zu lassen. Es werden hier vielmehr, wenn die Versicherung überhaupt vorkommt, dieselben Grundsätze befolgt wie bei der einfachen Kapitalversicherung auf den Todesfall. Wird die Prämie lebenslänglich gezahlt, so ist also:

$$P_x = \frac{_{n|}A_x}{a_x} = \frac{M_{x+n}}{N_x} . \tag{57a}$$

Wird die Prämienzahlungsdauer dagegen auf t Jahre begrenzt, so ist:

$$P_x = \frac{_{n|}A_x}{a_{x,\overline{t|}}} = \frac{M_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} . \tag{57b}$$

8. Die kurze Versicherung auf den Todesfall.

Die Prämienzahlungsdauer fällt im allgemeinen mit der Versicherungsdauer zusammen. Es ist also:

$$(58) \qquad P_x = \frac{|_n A_x}{a_{x,\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} .$$

Diese Prämie — die Jahresprämie der Risikoversicherung — bildet nahezu einen Mittelwert der natürlichen Prämien, die während der Versicherungsdauer zu zahlen wären, wenn die Versicherung von Jahr zu Jahr zu der dem Alter entsprechenden Wagnisprämie abgeschlossen würde. Bei kurzer Versicherungsdauer wird die Jahresprämie der Risikoversicherung vom arithmetischen Mittel der natürlichen Prämien nur wenig abweichen; bei sehr langer Dauer der Risikoversicherung ergäbe sich schließlich allerdings doch eine merkliche Abweichung. Die Durchschnittsprämie liegt im übrigen unter dem arithmetischen Mittel der natürlichen Prämien.

9. Die gemischte Versicherung auf den Todes- und den Lebensfall.

Die Prämien werden gewöhnlich während der n jährigen Versicherungsdauer entrichtet. Es ergibt sich dann also:

$$(59) \qquad P_{x,\overline{n}|} = \frac{A_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} .$$

Gerade bei der gemischten Versicherung kommt ziemlich häufig der Fall vor, daß die Prämienzahlungsdauer verstärkt abgekürzt wird, daß also, während die Versicherungsdauer spätestens erst nach n Jahren abläuft, die Prämenzahlungsdauer spätestens schon nach t Jahren ihr Ende erreicht. Es ergibt sich dann die Formel:

$$(60) \qquad {}_tP_{x,\overline{n}|} = \frac{A_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{t}|}} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+t}} .$$

Für diese Form der Versicherung haben einige Gesellschaften sogar besondere Tarife eingerichtet; man spricht dann bisweilen von einer Versicherung mit „Freijahren".

9. Kapitel.

Die Versicherung mit festem Auszahlungstermin.

Im 4. Kapitel ist die Sparversicherung behandelt worden, die zwar weniger in technischer, wohl aber in wirtschaftlicher Hinsicht als Versicherung bezeichnet werden kann. Die Sparversicherung dient vor allem auch als Ausstattungsversicherung. Sie wird vollkommener gestaltet, wenn sie in der Weise abgeschlossen wird, daß beim Ableben des versicherten Versorgers die Prämienzahlung als beendet gilt. Das versicherte Kapital wird dann nicht sofort ausgezahlt, sondern es wird erst fällig, wenn die ursprünglich bedungene Versicherungsdauer ihr Ende erreicht. Die Auszahlung der Versicherungssumme ist also auf einen bestimmten Termin festgelegt; und es ist gleichgültig, ob der versicherte Versorger oder die begünstigte Person alsdann noch am Leben ist oder nicht.

Die einmalige Prämie dieser Versicherung fällt zusammen mit der einmaligen Prämie der Sparversicherung. Denn da das versicherte Kapital unter allen Umständen erst mit dem Ablauf der festgesetzten Versicherungsdauer von n Jahren fällig werden soll, so ist:

$$A_{x,\overline{n|}} = v^n , \tag{61}$$

wobei mit $A_{x,\overline{n|}}$ der Barwert der Versicherung bezeichnet ist.

Die Nettojahresprämie ist nach der Grundformel (52) leicht zu bestimmen. Fällt die bedungene Prämienzahlungsdauer mit der festgesetzten Versicherungsdauer zusammen, so ist:

$$P_{x,\overline{n|}} = \frac{A_{x,\overline{n|}}}{a_{x,\overline{n|}}} = v^n : \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} . \tag{62}$$

Die Versicherung wird sinngemäß als Versicherung auf festen Termin oder als Versicherung mit festem Auszahlungstermin bezeichnet.

In der Praxis steht die Versicherung mit festem Auszahlungstermin der gemischten Versicherung sehr nahe. Die Prämien der gemischten Versicherung sind etwas höher als die Prämien der Versicherung mit festem Auszahlungstermin; doch ist der Unterschied nicht bedeutend. Nicht zu verwechseln ist die Versicherung auf festen Termin mit der nur als Zusatzversicherung vorkommenden Risikoversicherung auf festen Termin.

Die Risikoversicherung auf festen Termin kann als Gegensatz zur reinen Versicherung auf den Lebensfall aufgefaßt werden. In der reinen Erlebensfallversicherung wird das versicherte Kapital nach n Jahren unter der Voraussetzung fällig, daß der Versicherte alsdann noch am Leben ist. In der Risikoversicherung auf festen Termin dagegen wird das versicherte Kapital nach n Jahren unter der Voraussetzung fällig, daß der Versicherte inzwischen gestorben ist. Da die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Versicherte nach n Jahren entweder noch am Leben ist, oder daß er inzwischen gestorben ist, gleich der Gewißheit ist, da also

$$(63) \qquad {}_n p_x + {}_n q_x = 1$$

sein muß, so muß sich der Barwert der reinen Erlebensfallversicherung mit dem Barwert der Risikoversicherung auf festen Termin ebenfalls zur Einheit ergänzen, aber nicht zur Einheit der Summe unmittelbar, sondern, da die Summe erst nach n Jahren fällig wird, zum Barwert der nach n Jahren fälligen Einheit, das heißt also zum Barwert der gewöhnlichen Versicherung mit festem Auszahlungstermin. Bezeichnet man den Barwert der Risikoversicherung auf festen Termin sinngemäß mit $\overline{\underline{n}|}A_x$, so muß also sein:

$$(64) \qquad {}_n E_x + \overline{\underline{n}|}A_x = A_{x,\overline{n}|} ,$$

$$\overline{\underline{n}|}A_x = A_{x,\overline{n}|} - {}_n E_x ,$$

$$(65) \qquad \overline{\underline{n}|}A_x = v^n - \frac{D_{x+n}}{D_x} .$$

In der Praxis kommt die Risikoversicherung auf festen Termin zum Beispiel vor in der erweiterten Form der gewöhnlichen Versicherung mit festem Auszahlungstermin. Diese Versicherung hat man nämlich gelegentlich noch in der Weise ergänzt, daß man für den Fall des Ablebens des versicherten Versorgers nicht nur die Befreiung von weiterer Prämienzahlung mitversichert, sondern daß man auch noch die Gewährung einer Rente vereinbart, die bis zur Fälligkeit des versicherten Kapitals alljährlich (und zwar vorschüssig) am Jahrestage des Versicherungsscheins den Hinterbliebenen ausgezahlt wird. In der Regel wird sofort beim Ableben des Versicherten auch noch ein „Sterbegeld" fällig, das ebenso hoch bemessen wird wie der Jahresbetrag der Zeitrente. Die Zeitrente, also auch das Sterbegeld, wird gewöhnlich auf 10 % der Versicherungssumme festgesetzt. Diese etwas umständliche Form der Versicherung auf festen Termin bezeichnet man meist als „Familienversicherung" oder als „Familienversorgungsversicherung". Die Form der Versicherung ist sehr lehrreich, weil sie zeigt, wie man durch eine einfache Überlegung eine Formel sofort angeben kann, die eine umständliche Ableitung erforderte, wenn man sie auf dem sonst üblichen Wege entwickeln wollte. Man müßte dann im vorliegenden Falle den Barwert der Versicherung zusammensetzen aus den einzelnen Barwerten der für jedes einzelne Jahr geltenden besonderen Wagnisversicherung. Man müßte also folgendermaßen entwickeln:

Stirbt der Versicherte am Schlusse des 1. Jahres, so wird eine Summe fällig, die dann ausreicht, $(n-1)$mal die Zahlung der vorschüssigen Rente zu ermöglichen.

Stirbt der Versicherte am Schlusse des 2. Jahres, so wird eine Summe fällig, die dann ausreicht, $(n-2)$mal die Zahlung der vorschüssigen Rente zu ermöglichen usw.

Außerdem ist beim Ableben des Versicherten sofort ein Sterbegeld im Betrage einer Jahresrente auszuzahlen; und wenn die vereinbarte Dauer von n Jahren abgelaufen ist,

so ist die Versicherungssumme auszuzahlen, gleichviel ob der Versicherte alsdann noch am Leben ist oder nicht.

Bezeichnet man den Wert der Jahresrente mit ϱ, so führt diese Entwicklung zu der folgenden Reihe von Barwerten:

$$\varrho\left[\frac{C_x}{D_x}\cdot a_{\overline{n-1}|}+\frac{C_{x+1}}{D_x}\cdot a_{\overline{n-2}|}+\frac{C_{x+2}}{D_x}\cdot a_{\overline{n-3}|}+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+\frac{C_{x+n-2}}{D_x}\cdot a_{\overline{1}|}\right]+\varrho\cdot\frac{M_x-M_{x+n}}{D_x}+v^n\,.$$

Setzt man $\varrho=0{,}1$, und faßt man die den Faktor ϱ enthaltenden Glieder zusammen, so erhält man für den Barwert der Versicherung den Ausdruck:

$$v^n+\frac{0{,}1}{D_x}\left[C_x\cdot(1+a_{\overline{n-1}|})+C_{x+1}\cdot(1+a_{\overline{n-2}|})+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots+C_{x+n-2}\cdot(1+a_{\overline{1}|})+C_{x+n-1}\cdot(1+a_{\overline{0}|})\right].$$

Dabei ist $a_{\overline{0}|}=0$, nämlich der Barwert einer Rente, die überhaupt nicht fällig wird.

Statt dieser umständlichen Reihe erhält man aber sofort den viel einfacheren Ausdruck dafür, wenn man folgert, daß die mitversicherte Rente, falls sie dauernd zu zahlen wäre, zweifellos den Barwert $\varrho(a_{\overline{n}|}-1)$ aufweisen müßte, daß die Rente aber nicht zu zahlen ist, solange der Versicherte am Leben bleibt, und daß aus diesem Grunde der Barwert einer entsprechenden Leibrente abzuziehen ist. Der Barwert der Leibrente muß dem Barwert $(a_{\overline{n}|}-1)$ analog gebildet sein. Es ist nun mit dem Ausdruck $(a_{\overline{n}|}-1)$ eine Rente bezeichnet, die (n—1)mal zu zahlen ist. Die Rente ist gedacht als vorschüssige Zeitrente auf n Jahre, von der der erste Rentenbetrag 1 weggefallen ist. Dieser Rente entspricht die durch den Barwert $(a_{x,\overline{n}|}-1)$ ausgedrückte Leibrente. Bezeichnet man nun den Barwert der Familienversicherung mit $\overset{\varrho}{A}_{x,\overline{n}|}$, so ist:

(66) $$\overset{\varrho}{A}_{x,\overline{n}|}=v^n+\varrho\left[(a_{\overline{n}|}-a_{x,\overline{n}|})+{}_nA_x\right].$$

Das versicherte Kapital wird bei dieser Form der Versicherung unter allen Umständen nach n Jahren fällig, also auch dann, wenn der Versicherte vorher gestorben ist und die Hinterbliebenen die Rente erhalten haben. Bisweilen wird jedoch die Versicherung auch in der Weise abgeschlossen, daß das versicherte Kapital nach n Jahren nur dann fällig wird, wenn der Versicherte inzwischen gestorben ist. Es wird dann also die Rentenzahlung gewissermaßen durch die Kapitalzahlung abgelöst. Lebt der Versicherte dagegen nach n Jahren noch, so wird nicht das versicherte Kapital sofort fällig, sondern es erhält der Versicherungsnehmer dann eine sogenannte „Freipolice“ über den Betrag der ursprünglichen Summe, der Versorger bleibt dann also für den Fall seines späteren Ablebens ohne Prämienzahlung weiter versichert. In diesem Falle trifft der in der Formel (66) enthaltene Barwert v^n nicht mehr zu. An seine Stelle tritt dann vielmehr eine Verbindung anderer Barwerte. Es ergibt sich die folgende Entwicklung:

Lebt der Versicherte nach n Jahren noch, so gilt für ihn fernerhin die gewöhnliche Kapitalversicherung auf den Todesfall. Dieser Teil der Versicherung enthält also zunächst keinerlei Schutz für den Fall des vorherigen Ablebens; es handelt sich einfach um eine Todesfallversicherung mit Wartefrist, also um den Barwert ${}_{n|}A_x$.

Stirbt der Versicherte dagegen während der Versicherungsdauer von n Jahren, so wird das versicherte Kapital zwar fällig, aber es wird nicht sofort fällig, sondern erst, wenn die vereinbarte feste Versicherungsdauer abgelaufen ist. Hier liegt also die Risikoversicherung auf festen Termin vor, für die der Barwert $(v^n - {}_nE_x)$ Geltung hat.

In der zweiten Form der Familienversicherung tritt somit an die Stelle des Ausdruckes v^n der Ausdruck:

$$v^n - {}_nE_x + {}_{n|}A_x \, .$$

Dabei ist zu beachten, daß ${}_nE_x > {}_{n|}A_x$ sein muß. Denn mit ${}_nE_x$ ist der Barwert eines Kapitals bezeichnet, das im Erlebensfalle nach n Jahren sofort fällig wird; mit ${}_{n|}A_x$ dagegen ist der Barwert eines Kapitals bezeichnet, das im

Erlebensfalle nach n Jahren nicht sofort, sondern alsdann erst beim späteren Ableben fällig wird. Der zweite Barwert muß also kleiner sein als der erste. Man erhält nun allgemein:

(67a) $A^{\varrho}_{x,\boxed{n}} = v^n - [{}_nE_x - {}_n|A_x] + \varrho\,[a_{\overline{n}|} - a_{x,\overline{n}|} + {}_nA_x]$

oder auch:

(67b) $$A^{\varrho}_{x,\boxed{n}} = A^{\varrho}_{x,\overline{n}|} - [{}_nE_x - {}_n|A_x]\,.$$

Berücksichtigt man dabei, daß $A_{x,\overline{n}|} = {}_nA_x + {}_nE_x$, also ${}_nE_x = A_{x,\overline{n}|} - {}_nA_x$ ist, so erhält man auch:

(67c) $$A^{\varrho}_{x,\boxed{n}} = A^{\varrho}_{x,\overline{n}|} - [A_{x,\overline{n}|} - A_x]\,.$$

Da für beide Formen der Versicherung die laufenden Prämien im allgemeinen ebenfalls während einer Dauer von n Jahren entrichtet werden, so ergeben sich für die Nettojahresprämie die entsprechenden Formeln:

(68) $$P^{\varrho}_{x,\overline{n}|} = A^{\varrho}_{x,\overline{n}|} : a_{x,\overline{n}|}$$ und

(69) $$P^{\varrho}_{x,\boxed{n}} = A^{\varrho}_{x,\boxed{n}} : a_{x,\overline{n}|}\,.$$

Die Prämienzahlungsdauer kann selbstverständlich beliebig stark abgekürzt werden, in welchem Falle dann der besondere Barwert $a_{x,\overline{n}|}$ durch den allgemeinen Barwert $a_{x,\overline{t}|}$ zu ersetzen ist.

10. Kapitel.

Die Berechnung der Bruttoprämien.

Soweit im vorstehenden von den Aufschlägen für Verwaltungskosten überhaupt schon die Rede gewesen ist, sind nur allgemeine, stets auf die Nettoprämie bezogene, also mehr oder minder willkürlich bemessene Zuschläge erörtert worden. In der Praxis werden die Zuschläge hingegen

meist nach besonderen Verteilungsmaßstäben bemessen. Das Verfahren, einfach zum Barwert der Versicherung einen bestimmten Aufschlag hinzuzurechnen, ist nur in den seltensten Fällen am Platze. Vor allem muß man in der Praxis möglichst unterscheiden zwischen den Zuschlägen, die zur Bestreitung der dem Vermittler zu vergütenden Entschädigungen (Provisionen) zu dienen haben, und den Zuschlägen, aus denen die allgemeinen Verwaltungskosten zu decken sind. Aber auch die zur Bestreitung der allgemeinen Verwaltungskosten erforderlichen Aufschläge zerfallen in solche, aus denen einmalige Unkosten zu decken sind, und solche, aus denen die laufenden Unkosten bestritten werden. Bisweilen fehlt die eine oder die andere Form der Aufschläge vollständig. Es ist daher wichtig, sich über die Verschiedenheit der Zuteilungsformen klar zu werden.

Fast für jede Form der Versicherung ist die Zahlung einer sogenannten Abschlußprovision vorgesehen. Diese Abschlußprovision wird im allgemeinen bestimmt nach der Höhe der Versicherungssumme, bisweilen jedoch auch nach der Höhe der für die Versicherung einzuzahlenden ersten Jahresprämie. Handelt es sich um eine Versicherung zur einmaligen Einlage, so wird die Abschlußprovision vielfach aus dem Betrage dieser Einlage berechnet. Im großen und ganzen kann man die folgenden Formen unterscheiden:

Die Abschlußprovision wird berechnet:

aus der einmaligen Einlage bei der Rentenversicherung mit Kapitaleinzahlung,

aus der ersten Jahresprämie bei der Risikoversicherung und bei der Rentenversicherung mit Wartefrist, wenn diese Versicherungen zur laufenden Prämie abgeschlossen werden,

sonst im allgemeinen aus der Versicherungssumme.

Der Satz der Abschlußprovision ist im einzelnen sehr verschieden; der dafür zu erhebende Aufschlag ist demgemäß je nach der Höhe der Provision verschieden zu bemessen.

Wird die Provision und dementsprechend auch der Aufschlag im Verhältnis zur Versicherungssumme bemessen,

was also vor allem in der einfachen und abgekürzten Kapitalversicherung auf den Todesfall geschieht, so kann im Mittel ein Aufschlag von 30 Mark für 1000 Mark Versicherungssumme als ausreichend angesehen werden. Bei sparsamer Verwaltung können aus diesem Aufschlage sogar noch Erwerbsunkosten anderer Art, zum Beispiel Arzthonorare und dergleichen gedeckt werden. Wenn es die Wirtschaftslage der Nachkriegszeit mit sich gebracht hat, daß dieser Satz von 30 $^0/_{00}$ zum Teil merklich überschritten wird, so steht zu hoffen, daß man allmählich wieder zu einem gesunden Provisionswesen zurückkehren wird.

Da die Abschlußprovision sofort verausgabt wird, wenn die Versicherung zustande gekommen ist, so ist der Aufschlag dem Barwert der Versicherung hinzuzufügen. Man bezeichnet den Aufschlag mit α und bezieht ihn auf die Einheit der Versicherungssumme. Machen die Abschlußkosten also 30 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme aus, so ist $\alpha = 0{,}030$.

Die für die Versicherung weiterhin noch aufzuwendenden Unkosten kann man dann, wenn man sich mit einem einfachen Verteilungsverfahren begnügen will, ohne weitere Einteilung im Verhältnis der einmaligen oder der laufenden Prämie ausdrücken. Man bezeichnet diesen zweiten Aufschlag dann mit β und erhält die Zuschlagsform I.

Handelt es sich um eine Versicherung zur einmaligen Einlage, und bezeichnet man die Nettoeinlage mit A, die Bruttoeinlage aber mit $\mathfrak{A}$, so ist nach diesem Zuschlagssystem zunächst:

$$(70\underline{^a})\qquad \mathfrak{A} = \mathrm{A} + \alpha + \beta \cdot \mathfrak{A}\,, \qquad \text{also:}$$

$$(70\underline{^b})\qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathrm{A} + \alpha}{1 - \beta}\,.$$

Handelt es sich um die Zahlung laufender Prämien, so ist nach der Zuschlagsform I, wenn die Bruttojahresprämie mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet wird, zunächst:

$$(71\underline{^a})\qquad \mathfrak{P} = \frac{\mathrm{A} + \alpha}{\mathrm{a}} + \beta \cdot \mathfrak{P}\,.$$

Es ist dabei zu beachten, daß hier nicht der einfache Barwert A, sondern der um den Aufschlag α erhöhte Barwert $(A + \alpha)$ mit dem Rentenbarwert a zu dividieren ist. Man hat also:

$$\mathfrak{p} = P + \frac{\alpha}{a} + \beta \cdot \mathfrak{p}$$

und daher:

$$(71\underline{b}) \qquad \mathfrak{p} = \frac{P + \frac{\alpha}{a}}{1 - \beta} = \frac{A + \alpha}{(1-\beta) \cdot a}\,.$$

Statt dessen ist es bisweilen auch üblich, den Aufschlag für laufende Verwaltungskosten nicht aus der Bruttoprämie zu berechnen, sondern ihn einfach der erhöhten Nettoprämie hinzuzufügen. Man erhält dann die Formel:

$$(71\underline{c}) \qquad \mathfrak{p} = (1 + \beta)\left[\frac{A + \alpha}{a}\right] = (1 + \beta)\left[P + \frac{\alpha}{a}\right].$$

Der Wert des Aufschlages β unterliegt ebenfalls starken Schwankungen. Rechnet man mit einem Unkostensatz von 10 %, setzt man also $\beta = 0{,}10$, so hat man den Zuschlag im allgemeinen ausreichend bemessen.

Aus dem Aufschlage β ist die sogenannte Inkassoprovision zu decken. Während nämlich die Abschlußprovision einmalig für die Zuführung der Versicherung vergütet wird ohne Rücksicht darauf, wie lange die Versicherung läuft, oder wie lange sie aufrecht erhalten wird, wird die Inkassoprovision dem Vertreter gewissermaßen als Entschädigung für die mit dem Einziehen der Prämien verbundene Mühewaltung meist vom zweiten Versicherungsjahre an aus dem Betrage der Barprämie selbst vergütet. Der Satz der Inkassoprovision unterliegt nicht so starken Schwankungen wie der der Abschlußprovision.

Die Zuschlagsform I weist einen Nachteil auf, der zwar meist nur wenig ins Gewicht fällt, der sich in besonderen Fällen aber doch unangenehm bemerkbar machen kann. Der Nachteil besteht darin, daß nicht nur die Inkassokosten, bei denen sich das von selbst versteht, sondern daß auch die

allgemeinen Verwaltungskosten im Verhältnis der Jahresprämie ausgedrückt sind. Um zu erkennen, daß das nicht immer das Richtige trifft, braucht man nur zwei äußerste Fälle einander gegenüber zu stellen. Stellt man zum Beispiel einer auf sehr kurze Dauer abgeschlossenen gemischten Versicherung eine kurze Versicherung auf den Todesfall (eine Risikoversicherung) gegenüber und legt man in beiden Fällen eine Versicherungsdauer von 10 Jahren zugrunde, so ergibt sich für 10 000 Mark Versicherungssumme im ersten Falle eine Jahresprämie von etwa 1000 Mark, im zweiten Falle dagegen bei mittlerem Alter nur eine solche von etwa 100 Mark. Hätte man dabei den Aufschlag für laufende Verwaltungskosten im Verhältnis der Prämie berechnet, so ergäbe sich, obwohl in beiden Fällen dieselbe Summe versichert ist, bei einem Aufschlagssatz von 10 % im ersten Falle ein Zuschlag von etwa 100 Mark für das Jahr, im zweiten Falle dagegen nur ein Zuschlag von etwa 10 Mark.

Soll dieser Nachteil vermieden werden, so müssen die allgemeinen Verwaltungskosten von den Inkassokosten getrennt werden. Die allgemeinen Verwaltungskosten werden sich im großen und ganzen für die Versicherung der einen Form etwa ebenso hoch stellen wie für die Versicherung einer anderen Form; sie werden also am zweckmäßigsten im Verhältnis der Versicherungssumme bemessen*). Der Satz der allgemeinen Unkosten ist indes nicht dem Barwert der Versicherung, sondern er ist der Jahresprämie hinzuzufügen. Denn es muß angenommen werden, daß im Durchschnitt jede Versicherung im Verhältnis zu der versicherten Summe alljährlich etwa denselben Aufwand an allgemeinen Unkosten erfordere.

Der Aufschlag für laufende Unkosten muß also geteilt werden. Man läßt den Aufschlag β bestehen, versteht dar-

*) Man hat versucht, diesen Aufschlag und sogar einen Teil des Aufschlages der allgemeinen Unkosten nach der Zahl der Versicherungen zu verteilen. Dieses Verfahren ist nicht unbedenklich; auch schafft es wirtschaftlich keinen besonderen Nutzen.

unter aber nur den Aufschlag für allgemeine Verwaltungskosten und bestimmt ihn im Verhältnis der Versicherungssumme. Außerdem setzt man noch einen Aufschlag γ fest, der auf die Jahresprämie selbst bezogen wird und zur Zahlung der Inkassovergütungen zu dienen hat.

Diesen letzten Satz darf man nicht zu niedrig bemessen. Denn zu den Inkassovergütungen gehören ihrem Wesen nach auch die den Hauptgeschäftsstellen zuerkannten festen Einnahmen, soweit sie durch die verdienten Provisionen nicht gedeckt sind. Man bezeichnet diese Beträge zum Teil als Inkassogarantien. Rechnet man diese Garantien den wirklich verausgabten Inkassovergütungen hinzu, so wird man im Durchschnitt mit einem Satz von vielleicht 4 % der Bruttoprämie zu rechnen haben. Es ist dann also $\gamma = 0{,}04$. Doch kann der Satz auch höher oder niedriger ausfallen.

Der Aufschlag für allgemeine Unkosten unterliegt auch hier wieder erheblichen Schwankungen. Ein Aufschlag von $2\frac{1}{2}$ Mark fürs Tausend der Versicherungssumme kann jedoch bei sparsamer Verwaltung wohl als hinreichend angesehen werden.

Für die hier besprochene Zuschlagsform II erhält man nun zunächst die Gleichung:

$$(72^{\underline{a}}) \qquad \mathfrak{p} = P + \frac{\alpha}{a} + \beta + \gamma \cdot \mathfrak{p}$$

und somit also die Formel:

$$(72^{\underline{b}}) \qquad \mathfrak{p} = \frac{P + \frac{\alpha}{a} + \beta}{(1 - \gamma)},$$

worin man dann zum Beispiel mit Annäherung an die Durchschnittswerte der Praxis

$$\alpha = 0{,}030, \qquad \beta = 0{,}0025, \qquad \gamma = 0{,}040$$

setzen kann.

Auch diese Zuschlagsform trifft insofern noch nicht ganz das Richtige, als danach die allgemeinen Unkosten durch-

weg als laufende Unkosten angesehen werden. Ein Teil davon muß aber richtiger den einmaligen Unkosten zugezählt werden. Dazu gehören zum Beispiel die Reisekosten der Vertreter, die von der Gesellschaft verausgabten Werbungskosten, die Aufwendungen für Zeitungsanzeigen und dergleichen. Streng genommen gehört dazu auch noch ein Teil der sonstigen allgemeinen Unkosten. Rechnet man nur mit den von der Gesellschaft bar verauslagten Beträgen, so kann man mit dem Provisionssatz zusammen einen Unkostensatz von vielleicht 40 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme festsetzen, der dann im Durchschnitt als ausreichend angesehen werden kann. Den Satz der alljährlich wiederkehrenden laufenden Unkosten kann man dann entsprechend ermäßigen; ein Satz von 1½ Mark fürs Tausend der Versicherungssumme wird bei sparsamer Verwaltung das Richtige treffen. Man erhält dann nach der Zuschlagsform II die Formel:

$$\text{(72c)} \qquad \mathfrak{p} = \frac{P + \frac{0{,}040}{a} + 0{,}0015}{0{,}96}\,.$$

Diese Formel eignet sich sehr gut zur Berechnung der Prämien für alle Arten der Todesfallversicherung, wenn die Versicherung zur laufenden Prämie abgeschlossen wird und die Abschlußprovision im Verhältnis der Versicherungssumme bemessen wird.

Bei Versicherungen zur einmaligen Einlage fällt die Inkassoprovision weg. Es wird also $\gamma = 0$*). Der dem Barwert hinzugefügte Aufschlag α ist dann nicht mit dem Rentenbarwert zu dividieren, weil der Aufschlag nicht auf eine

*) Wenn im Gegensatz zu dem, was logisch ist und was als technisch richtig zu gelten hat, oft genug auch aus solchen Versicherungen Inkassovergütungen gezahlt werden, obwohl gar keine „Folgeprämien" einzuziehen sind, so ist das sehr zu bedauern, umsomehr, als damit meist eine recht erhebliche Belastung verbunden ist, die beispielsweise in der Sparversicherung geradezu zu einem Hemmnis der Werbung werden kann.

Reihe von Jahren verteilt, sondern sofort eingezahlt werden soll. Umgekehrt ist der Aufschlag für laufende Unkosten aus demselben Grunde mit dem Rentenbarwert zu multiplizieren.

Man kann das auch anders darstellen; man kann nämlich wieder der Leistung des Versicherungsnehmers die Leistung der Gesellschaft gegenüberstellen. Wenn laufende Prämien gezahlt werden, so besteht die Leistung des Versicherungsnehmers darin, daß er während der Prämienzahlungsdauer die Bruttoprämie $\mathfrak{P}$ entrichtet. Der Barwert der vereinbarten Zahlungen ist ausgedrückt durch das Produkt $\mathfrak{P} \cdot \mathrm{a}$. Die Leistung der Gesellschaft besteht vor allem in der Einhaltung der aus der Versicherung selbst übernommenen Verpflichtungen. Der Barwert dieser Leistungen ist gleichbedeutend mit dem Barwert der Versicherung; er ist also ausgedrückt durch die einmalige Nettoprämie A. Dazu kommt dann noch die Leistung der Gesellschaft, die darin besteht, daß sie dem Vermittler die Abschlußprovision vergütet und die sonstigen einmaligen Unkosten trägt. Diese Leistung macht den Betrag α aus. Ferner hat die Gesellschaft während der Versicherungsdauer die laufenden Unkosten zu bestreiten. Der Barwert dieser Leistungen ist ausgedrückt durch das Produkt $\beta \cdot \mathrm{a}$. Endlich hat die Gesellschaft die Inkassovergütungen zu zahlen, wobei der Einfachheit halber im allgemeinen so gerechnet wird, wie wenn diese Beträge gleich vom Beginn an zu zahlen wären. Der Barwert dieser Leistungen ist ausgedrückt durch das Produkt $\gamma \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathrm{a}$. Nach dem Satz der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung ergibt sich dann:

$$\mathfrak{P} \cdot \mathrm{a} = \mathrm{A} + \alpha + \beta \cdot \mathrm{a} + \gamma \cdot \mathfrak{P} \cdot \mathrm{a}\,, \qquad \text{also:}$$

$$(72\underline{\text{d}}) \qquad \mathfrak{P} = \frac{\mathrm{A} + \alpha + \beta \cdot \mathrm{a}}{(1 - \gamma) \cdot \mathrm{a}}\,.$$

Ist die Versicherung nun zur einmaligen Prämie abgeschlossen, so fällt die Inkassovergütung weg, und es tritt an die Stelle des Produktes $\mathfrak{P} \cdot \mathrm{a}$ der Betrag der einmaligen Bruttoeinlage. Es ergibt sich dann also die Formel:

$$(73\underline{\text{a}}) \qquad \mathfrak{A} = \mathrm{A} + \alpha + \beta \cdot \mathrm{a}\,.$$

Da Versicherungen, für die keine Prämien mehr zu zahlen sind, erfahrungsgemäß weniger an laufenden Unkosten verursachen als solche Versicherungen, für die noch Prämien zu entrichten sind, so kann in der Formel ($73\underline{a}$) der Wert β etwas niedriger bemessen werden als in den Formeln (72). Man kann dann beispielsweise setzen:

$$(73\underline{b}) \qquad \mathfrak{A} = A + 0{,}040 + 0{,}001 \cdot a \,.$$

Die Formel ($72\underline{d}$) hat vor der Formel ($72\underline{b}$) unleugbar einen Vorzug: sie kann auch dann ohne weiteres angewendet werden, wenn die Dauer der Prämienzahlung mit der Dauer der Versicherung nicht zusammenfällt. Denn der Barwert a im Zähler der Formel ($72\underline{d}$) hängt ab von der Art und der Dauer der Unkostendeckung, während der Barwert a im Nenner der Formel ($72\underline{d}$) abhängig ist von der Art und der Dauer der Prämienzahlung. Handelt es sich zum Beispiel um die lebenslängliche Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlungsdauer, so lautet die Formel ($72\underline{d}$) in vollständiger Schreibung:

$$(72\underline{e}) \qquad {}_n\mathfrak{P}_x = \frac{A_x + \alpha + \beta \cdot a_x}{(1-\gamma) \cdot a_{x,\overline{n}|}} \,.$$

Die beiden Rentenbarwerte sind dann also verschieden. Es ist aber sehr wichtig, auf derartige Verschiedenheiten Rücksicht zu nehmen, wenn man die Unkostenaufschläge genau bemessen will. Man kann dann auch berücksichtigen, daß die Unkosten sich vermindern, wenn die Prämienzahlungsdauer abgelaufen ist. Bezeichnet man den Zuschlag der „prämienpflichtigen" Versicherung mit β_1, den der „prämienfreien" Versicherung mit β_2, so erhält man die genaue Formel:

$$(72\underline{f}) \qquad {}_n\mathfrak{P}_x = \frac{A_x + \alpha + \beta_2 \cdot a_x + (\beta_1 - \beta_2)\, a_{x,\overline{n}|}}{(1-\gamma) \cdot a_{x,\overline{n}|}} \,.$$

Man hat dann im Zähler zunächst für die ganze Dauer der Versicherung den Aufschlag β_2 eingesetzt und ihn für die Dauer der Prämienzahlung noch auf den Aufschlag β_1 ergänzt.

Diese Formel kann allgemein angewendet werden, wenn die Prämienzahlungsdauer kürzer bemessen ist als die Ver-

sicherungsdauer. Ist zum Beispiel eine gemischte Versicherung in der Weise abgeschlossen, daß die Versicherung selbst längstens n Jahre hindurch, die Prämienzahlung dagegen höchstens t Jahre hindurch läuft, so ergibt sich die Formel:

$$(72\underline{g})\qquad {}_t\mathfrak{P}_{x,\overline{n}|} = \frac{A_{x,\overline{n}|} + \alpha + \beta_2 \cdot a_{x,\overline{n}|} + (\beta_1 - \beta_2) \cdot a_{x,\overline{t}|}}{(1-\gamma) \cdot a_{x,\overline{t}|}} .$$

Setzt man dabei die im vorstehenden angegebenen Durchschnittswerte ein, so erhält man die besondere Formel:

$$(72\underline{h})\qquad {}_t\mathfrak{P}_{x,\overline{n}|} = \frac{A_{x,\overline{n}|} + 0{,}040 + 0{,}001 \cdot a_{x,\overline{n}|} + 0{,}0005 \cdot a_{x,\overline{t}|}}{0{,}96 \cdot a_{x,\overline{t}|}} .$$

Die Zuschläge lassen sich nötigenfalls auch noch weiter abstufen; doch wird man von der Möglichkeit dazu nur selten Gebrauch machen. Ueberhaupt sind sorgfältig verteilte Aufschläge meist nur in der Todesfallversicherung üblich. Bei den verschiedenen Formen der Versicherung auf den Lebensfall begnügt man sich gewöhnlich mit einfacheren Zuschlagsformen. Wird die Abschlußprovision nach der Versicherungssumme bemessen, so genügen meist die Formeln (70$\underline{b}$) und (71$\underline{b}$). Wird eine einmalige Einlage gezahlt und aus dieser die Provision berechnet, so genügt sogar die einfache Formel:

$$(74\underline{a})\qquad \mathfrak{A} = \frac{A}{(1-\alpha)} ,$$

wobei dann α so zu bestimmen ist, daß außer dem Aufschlag für die Provision auch noch ein Aufschlag für sonstige, im besonderen also für laufende Unkosten in der Einlage enthalten ist. Ein Gesamtaufschlag von 5 % kann vielfach schon als ausreichend angesehen werden; man erhält dann also die Formel:

$$(74\underline{b})\qquad \mathfrak{A} = \frac{A}{0{,}95} .$$

Statt dessen genügt auch die einfachere Form:

$$(74\underline{c})\qquad \mathfrak{A} = (1+\alpha) \cdot A ,$$

also bei einem Aufschlag von 5 % die besondere Formel:

(74d) $$\mathfrak{A} = 1{,}05 \cdot A\,.$$

Wird bei laufender Prämienzahlung als Abschlußprovision ein bestimmter Teil der ersten Jahresprämie vergütet, so kann man meist ganz darauf verzichten, dafür einen besonderen Aufschlag festzusetzen. Man deckt dann diese Provision einfach aus dem Aufschlag der allgemeinen Verwaltungskosten. So genügt zum Beispiel für die Versicherung einer aufgeschobenen Rente eine der beiden Formeln:

(75a) $$\mathfrak{p} = (1+\beta)\cdot P$$ und

(75b) $$\mathfrak{p} = \frac{P}{(1-\beta)}\,.$$

Für die Risikoversicherung dagegen soll der Aufschlag, der zur Deckung der laufenden Unkosten zu dienen hat, möglichst nicht im Verhältnis der Prämie bemessen werden, da er dann viel zu gering ausfiele oder einen sehr hohen Satz aufweisen müßte. Es empfiehlt sich vielmehr, für die Risikoversicherung sowie auch für andere, ähnlich geartete Versicherungen mit sehr niedrigen Prämien den Aufschlag im Verhältnis der Versicherungssumme zu bemessen. Es wäre da zum Beispiel die Formel

(76a) $$\mathfrak{p} = \frac{P+\beta}{(1-\gamma)}$$

am Platze, wobei der Aufschlag γ dem für die Versicherung festgesetzten Satz der Inkassoprovision anzupassen ist. Wird der Inkassosatz zum Beispiel auf 7½ % festgesetzt — er wird der niedrigen Prämien wegen gewöhnlich höher angesetzt als in der regelrechten Todesfallversicherung —, und bleibt für β der Wert 0,0025 bestehen, so ergibt sich die besondere Formel:

(76b) $$\mathfrak{p} = \frac{P+0{,}0025}{0{,}925}\,.$$

Die Abschlußprovision, die meist nur gering ist, kann dabei als durch die anderen Aufschläge gedeckt angesehen werden. Man kann sie jedoch, wenn man das für angebracht hält,

sehr wohl auch berücksichtigen. Ist zum Beispiel festgesetzt, daß eine Abschlußprovision von 30 % der ersten Jahresprämie gezahlt werden soll, und daß dann vom zweiten Jahre an eine Inkassoprovision von 7½ % der „Folgeprämie" vergütet werden soll, so ist in dem Aufschlage für die Inkassoprovision schon ein Teil der Abschlußprovision enthalten, nämlich jener Teil von 7½ %, der nach der Formel (76a) ohnehin schon berücksichtigt wäre. Es kommt also neu hinzu nur noch eine Abschlußprovision von 22½ % der Prämie. Mithin ergibt sich zunächst die Gleichung:

$$\mathfrak{p} = P + \frac{0{,}225 \cdot \mathfrak{p}}{a} + \beta + 0{,}075 \cdot \mathfrak{p}\,;$$

und aus dieser Gleichung erhält man dann die besondere Formel:

$$(76\text{c}) \qquad \mathfrak{p} = \frac{P + 0{,}0025}{0{,}925 - \dfrac{0{,}225}{a}}\,.$$

In vielen Fällen wird es sich nicht vermeiden lassen, für die Berechnung der Bruttoprämien besondere, hier nicht aufgeführte Formeln aufzustellen. Die im vorstehenden angegebenen Formeln dürften jedoch ausreichen, für solche Fälle wenigstens die Richtlinien zu geben. Besonders sei noch hervorgehoben, daß die angegebenen Formeln nur zur Berechnung der notwendigen Bruttoprämien dienen können. Die Formeln werden also im allgemeinen nur angewendet werden können, wenn es sich um Versicherungen zu festen Prämien handelt, also um solche Versicherungen, die am Geschäftsgewinn der Gesellschaft nicht beteiligt sein sollen. Andernfalls müßten zu den Unkostenaufschlägen noch besondere Gewinnaufschläge hinzukommen, deren Erklärung hier zu weit führen würde. Solche Gewinnaufschläge haben im allgemeinen den Charakter von Sicherheitsaufschlägen. Wird auf jegliche Abstufung des Gewinnaufschlages verzichtet, so kann man im Mittel einen Aufschlag von 10 % der notwendigen Prämie als angemessen ansehen.

11. Kapitel.

Versicherungen mit veränderlicher Leistung oder Gegenleistung.

Es kommt bisweilen vor, daß für eine Versicherung nicht eine gleichbleibende, sondern eine veränderliche Leistung oder Gegenleistung festgesetzt wird. Meist wird davon die Leistung des Versicherungsnehmers betroffen, sodaß dann also eine veränderliche Tarifprämie festgesetzt wird. Eine solche Bestimmung ist nicht zu verwechseln mit der Veränderung der Tarifprämie, die dadurch entsteht, daß auf die Versicherung Gewinnanteile vergütet werden, die auf die Prämie angerechnet werden. Es handelt sich hier vielmehr um eine vertraglich festgelegte Veränderung der Prämie.

Da die Leistung des Versicherungsnehmers als Rentenzahlung anzusehen ist, so erhält man die vertraglich veränderliche Prämie, wenn man den Barwert der Versicherung mit dem Barwert der veränderlichen Leibrente dividiert, die der Prämienzahlungsart entspricht.

Der Auszahlungswert der Rente sei im ersten Jahre gleich der Einheit. Im zweiten Jahre (oder von irgend einem anderen Zeitpunkt an) erhöht oder ermäßigt sich die Rente dann alljährlich um einen bestimmten Satz ε, also um einen bestimmten Teil der Einheit. Bezeichnet man den Barwert der steigenden Rente mit $a^{<}$, den Barwert der fallenden Rente mit $a^{>}$, so erhält man, wenn die Veränderung schon nach einem Jahre beginnen soll, für die am häufigsten vorkommende abgekürzte Rente den Ausdruck:

$$a^{\lesseqgtr}_{x,\overline{n}|} = \frac{D_x}{D_x} + (1 \pm \varepsilon)\frac{D_{x+1}}{D_x} + (1 \pm 2\,\varepsilon)\frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots\dots$$

$$\dots\dots + \left(1 \pm \overline{n-1}\,\varepsilon\right)\frac{D_{x+n-1}}{D_x}\,.$$

Formt man diese Summe wieder in derselben Weise um,

wie das im 2. Kapitel bei der Besprechung der veränderlichen Zeitrente gezeigt worden ist, so erhält man:

$$a^{\lessgtr}_{x,\overline{n}|} \cdot D_x = \Sigma_1 \pm \varepsilon \cdot \Sigma_2 \, ,$$

$$\Sigma_1 = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots\ldots + D_{x+n-1} \, ,$$

$$\Sigma_1 = N_x - N_{x+n} \, ,$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\ldots &+ D_{x+n-1} \\ + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots\ldots &+ D_{x+n-1} \\ + D_{x+3} + \ldots\ldots &+ D_{x+n-1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ &+ D_{x+n-1} \, . \end{aligned}$$

Die Reihe hat nach jeder Seite hin (n—1) Summanden. Wenn man die Horizontalreihen summiert, so erhält man also:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma_2 = N_{x+1} &- N_{x+n} \\ N_{x+2} &- N_{x+n} \\ N_{x+3} &- N_{x+n} \\ \cdots\cdots & \\ N_{x+n-1} &- N_{x+n} \end{aligned}\right\} \text{(n—1) Summanden!}$$

Hier braucht man nun wieder die Summen der Werte N, die ebenfalls tabellarisch zusammengestellt und mit dem Symbol S bezeichnet werden, derart daß

$$\Sigma N_x = \Sigma \Sigma D_x = S_x$$

ist. Man bezeichnet diese Summen sinngemäß auch als Doppelsummen der diskontierten Zahlen der Lebenden.

Es ist nun in der neuen Bezeichnungsweise:

$$N_{x+1} + N_{x+2} + N_{x+3} + \ldots\ldots + N_{x+n-1} = S_{x+1} - S_{x+n} \, .$$

Man erhält mithin die Hilfsgleichung:

$$\Sigma_2 = S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)\, N_{x+n}$$

und somit:

$$(77) \quad a^{\lessgtr}_{x,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \pm \varepsilon \left[\frac{S_{x+1} - S_{x+n} - (n-1)\, N_{x+n}}{D_x}\right] .$$

Bezeichnet man den Barwert der ergänzenden Rente mit $a'_{x,\overline{n}|}$, so erhält man auch:

(78) $$\overset{\lessgtr}{a}_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} \pm \varepsilon \cdot a'_{x,\overline{n}|} .$$

Beginnt die Veränderung der Rente nicht schon mit dem zweiten Jahre, also nach einem Jahre, sondern beginnt die Veränderung erst nach t Jahren, so ist zunächst:

(79a) $$\overset{t\,\lessgtr}{a}_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} \pm \varepsilon \cdot {}^{t}a'_{x,\overline{n}|} ,$$ also:

(80) $$\overset{t\,\lessgtr}{a}_{x,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \pm \varepsilon \left[\frac{S_{x+t} - S_{x+n} - (n-t) N_{x+n}}{D_x}\right] .$$

Man beachte dabei, daß in dem ergänzenden Barwert der Unterschied der Indices beider Doppelsummen übereinstimmen muß mit dem Faktor der einfachen Summe. In der Tat ist:

$$(x+n) - (x+t) = (n-t) .$$

Berücksichtigt man das, so wird man nicht leicht eine falsche Formel zugrunde legen.

Ist die Versicherung auf Lebenszeit abgeschlossen, so wird $(x+n) = \omega$. Die Werte N_{x+n} und S_{x+n} verschwinden also von selbst, und es wird:

(81) $$\overset{t\,\lessgtr}{a}_{x} = a_x \pm \varepsilon \cdot {}^{t}a'_x = \frac{N_x}{D_x} \pm \varepsilon \frac{S_{x+t}}{D_x} .$$

Besonders verdient hier Beachtung der Fall, daß sich die Rente schon vom zweiten Jahre an erhöht, und daß der Steigerungssatz selbst ebenfalls gleich der Einheit ist, daß die Rente sich also im zweiten Jahre verdoppelt, im dritten Jahre verdreifacht usw. Es ist dann $t=1$, $\varepsilon=1$ und mithin:

(82) $$a_x^{<1} = \frac{N_x + S_{x+1}}{D_x} = \frac{S_x}{D_x} .$$

Nicht geringe Bedeutung kommt auch der entsprechenden

Formel für die abgekürzte Rente zu. Für diese ergibt sich ohne weiteres die Form:

$$(83) \qquad a^{<1}_{x,\overline{n|}} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x} .$$

Denn wenn $\varepsilon = 1$ ist, so ist es möglich, die Werte des einfachen Barwertes mit denen des ergänzenden Barwertes zu vereinigen, weil ja

$$(84) \qquad N_x + S_{x+1} = S_x$$

gesetzt werden kann.

Die Barwerte veränderlicher Renten werden hauptsächlich zur Berechnung von veränderlichen Prämien verwendet. Als Grundversicherungen kommen Versicherungen veränderlicher Renten fast niemals, als Zusatzversicherungen kommen sie verhältnismäßig selten vor.

Der Wert ε darf nicht beliebig groß gewählt werden. In der Formel

$$\overset{>}{a}_x = a_x - \varepsilon \cdot a'_x$$

zum Beispiel muß die Bedingung erfüllt werden, daß

$$a_x > \varepsilon \cdot a'_x , \qquad \text{also}$$

$$(85) \qquad \varepsilon < \frac{a_x}{a'_x} \qquad \text{ist.}$$

Praktisch sind schon Werte von der Größenordnung $\varepsilon = 0{,}1$ oft zu hoch, wenn es sich um fallende Prämien handelt.

Die Nettojahresprämie für eine Versicherung mit vertraglich veränderlicher Prämie berechnet sich nämlich sinngemäß nach der Formel:

$$(86) \qquad P_x^{\lesseqgtr} = \frac{A_x}{a_x^{\lesseqgtr}} .$$

Die nach dieser Formel berechnete Prämie ist die Anfangsprämie.

Es leuchtet ein, daß hohe Werte von ε praktisch keine Verwendung finden können. Denn wenn ε verhältnismäßig groß ist, so ist $a_x^{>}$ verhältnismäßig klein; für $P_x^{>}$ ergeben sich dann aber ziemlich hohe Werte, ja sogar auffallend hohe Werte, wenn ε entsprechend groß gewählt wird. Wäre gerade $\varepsilon = \frac{a_x}{a'_x}$, so würde sogar $a_x^{>} = 0$, also $P_x^{>} = \infty$ werden.

Aber auch in dem Barwert der steigenden Rente, also in dem Wert $a_x^{<}$ darf ε nicht zu groß werden. Es könnte sonst geschehen, daß $P_x^{<}$ schließlich kleiner ausfiele als die Wagnisprämie Π_x. Das aber wäre nicht zulässig, da die Nettojahresprämie des ersten Jahres unbedingt zur Deckung des Wagnisses ausreichen muß.

Für die Versicherung mit steigender Vertragsprämie gilt also die Bedingung:

$$\frac{A_x}{a_x^{<}} \geqq \Pi_x \,,$$

woraus sich dann weiter ergibt:

$$a_x^{<} \leqq \frac{A_x}{\Pi_x} \,,$$

$$(a_x + \varepsilon \cdot a'_x) \leqq \frac{A_x}{\Pi_x} \,,$$

$$\varepsilon \leqq \left[\frac{A_x}{a'_x \cdot \Pi_x} - \frac{a_x}{a'_x} \right]. \tag{87}$$

Die Barwerte A_x und a_x sind in dieser Bedingungsgleichung für die betreffende Versicherungsform sinngemäß anzuwenden.

Versicherungen mit veränderlicher Prämie werden oft auch in der Weise abgeschlossen, daß sich die Prämie von einem bestimmten Zeitpunkt an nur ein einziges Mal verändert, daß sie weiterhin dann also wieder gleichbleibt.

Auch in diesem Falle gilt zunächst die grundlegende Formel:

$$(79^{\underline{b}})\qquad \overset{t}{a}{}^{\lesseqgtr} = a \pm \varepsilon \cdot \overset{t}{a}{}',$$

wobei dann, wenn es sich zum Beispiel um die abgekürzte Rente handelt, einfach

$$\overset{t}{a}{}'_{x,\overline{n}|} = \frac{N_{x+t} - N_{x+n}}{D_x}$$

zu setzen ist. Man kann hier indes auch anders vorgehen. Da es sich nämlich hier nicht um die Barwerte steigender Renten, sondern nur um die Barwerte einfacher Renten handelt, so kann man den Wert $a^{\lesseqgtr}$ stets einfach durch Barwerte sofort beginnender Renten ausdrücken. Soll sich eine Prämie zum Beispiel nach t Jahren um einen bestimmten Satz ϱ ermäßigen, wobei die Ermäßigung im Verhältnis zur Anfangsprämie zu berechnen ist, so ergibt sich einfach als „Divisionsrente" der Ausdruck:

$$(88)\qquad \overset{t\,>}{a}_{x,\overline{n}|} = (1-\varrho)\, a_{x,\overline{n}|} + \varrho \cdot a_{x,\overline{t}|}\,.$$

Soll sich die Prämie dagegen nach t Jahren um den Satz ϱ erhöhen, so ist zu dividieren mit dem Rentenbarwert:

$$(89)\qquad \overset{t\,<}{a}_{x,\overline{n}|} = (1+\varrho)\, a_{x,\overline{n}|} - \varrho \cdot a_{x,\overline{t}|}\,.$$

Ganz allgemein erhält man also die Gleichung:

$$(90)\qquad \overset{t\,\lesseqgtr}{a}_{x,\overline{n}|} = (1\pm\varrho)\, a_{x,\overline{n}|} \mp \varrho \cdot a_{x,\overline{t}|}\,.$$

Die damit berechnete Prämie ist stets die Anfangsprämie.

Wird die Prämie lebenslänglich gezahlt, so ist in der Formel (90) einfach $a_{x,\overline{n}|}$ durch a_x zu ersetzen.

Die Anwendung der für die Berechnung von Bruttoprämien gegebenen Formeln ergibt sich von selbst. Sind die Aufschläge nicht streng zugeteilt, so wird in der Praxis bei Versicherungen mit veränderlicher Prämie der Aufschlag meist in derselben Weise berechnet, wie das bei Versicherungen mit vertraglich gleichbleibender Prämie üblich ist. Sind die Aufschläge dagegen streng zugeteilt, so ist zu

beachten, daß der Zuschlag für laufende Unkosten unverändert bleiben muß. Die Formel ($72^{\underline{d}}$) zum Beispiel geht dann über in die Formel:

$$\mathfrak{P}^{\lesseqgtr} = \frac{A + \alpha + \beta \cdot a}{(1-\gamma)\, a^{\lesseqgtr}}. \tag{91}$$

Versicherungen mit veränderlicher Leistung der Gesellschaft kommen selten vor. Die Veränderlichkeit der Auszahlung entspricht vollständig der Veränderlichkeit der Einzahlung. Dementsprechend ergeben sich auch analoge Formeln.

Stirbt der Versicherte im ersten Jahr, so wird die Summe 1 fällig, stirbt er im zweiten Jahre, so wird fällig die Summe $(1 \pm \varepsilon)$, stirbt er im dritten Jahre, so wird fällig die Summe $(1 \pm 2\varepsilon)$ usw. Als Barwert der Leistungen der Gesellschaft erhält man also den Ausdruck:

$$A_x^{\lesseqgtr} = \frac{C_x + (1 \pm \varepsilon)\, C_{x+1} + (1 \pm 2\,\varepsilon)\, C_{x+2} + \ldots\ldots}{D_x}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in derselben Weise weiter, wie das bei den Rentenbarwerten geschehen ist, so erhält man schließlich die Gleichung:

$$A_x^{\lesseqgtr} = \frac{M_x \pm \varepsilon \cdot \Sigma M_{x+1}}{D_x}.$$

Auch für die Werte ΣM, also für die Doppelsummen der diskontierten Zahlen der Gestorbenen, ist wieder eine besondere Bezeichnung gebräuchlich; man hat dafür das Symbol R eingeführt. Man erhält somit die Formel:

$$A_x^{\lesseqgtr} = \frac{M_x \pm \varepsilon \cdot R_{x+1}}{D_x}. \tag{92}$$

Diese Formel gilt für die lebenslängliche Versicherung auf den Todesfall. Liegt eine gemischte Versicherung vor, so ist festzulegen, welche Auszahlung nach n Jahren im Erlebensfalle geleistet werden soll. Soll im Erlebensfalle die

Summe 1 gezahlt werden, so ergibt sich für den Barwert der Versicherung die Formel:

$$(93)\quad A^{\lesseqgtr}_{x,\overline{n|}} = A_{x,\overline{n|}} \pm \varepsilon \left\{ \frac{R_{x+1} - R_{x+n} - (n-1)\, M_{x+n}}{D_x} \right\}.$$

Es kommt aber auch vor, daß die im Erlebensfalle auszuzahlende Summe die Veränderung mitmachen soll. Doch geschieht das in der Regel nur dann, wenn es sich nicht um fallende, sondern um steigende Summen handelt. Die Steigerung selbst ist dabei oft gleich der Einheit; es ist also $\varepsilon = 1$. In diesem Falle ergibt sich zunächst für die Versicherung auf Lebenszeit die einfache Gleichung:

$$(94)\qquad A_x^{<1} = \frac{R_x}{D_x},$$

während sich für die gemischte Versicherung die Formel

$$(95)\qquad A^{<1}_{x,\overline{n|}} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n} + n \cdot D_{x+n}}{D_x}$$

ergibt.

Im übrigen können die sämtlichen für die veränderlichen Leistungen des Versicherungsnehmers gegebenen Regeln sinngemäß angewendet werden. So kann zum Beispiel bestimmt werden, daß die Veränderung nicht sofort beginnen, sondern erst nach t Jahren eintreten soll. Soll im Erlebensfalle die Summe 1 fällig werden, so ergibt sich dann für die gemischte Versicherung die Formel:

$$(96)\quad {}^{t}A^{\lesseqgtr\varepsilon}_{x,\overline{n|}} = A_{x,\overline{n|}} \pm \varepsilon \left\{ \frac{R_{x+t} - R_{x+n} - (n-t)\, M_{x+n}}{D_x} \right\}.$$

Bisweilen wird die Steigerung so festgesetzt, daß sie nach n Jahren aufhört, ohne daß aber die Versicherung selbst ihr Ende erreicht. Dabei ist dann gewöhnlich wieder der Steigerungssatz gleich der Einheit, also $\varepsilon = 1$. Es wird dann beim Ableben des Versicherten im ersten Jahre die einfache Summe, im zweiten Jahre die doppelte Summe, im dritten Jahre die dreifache Summe fällig usw. In

dieser Weise wird die Steigerung fortgesetzt. Nach n Jahren hört die Steigerung jedoch auf. Stirbt der Versicherte später, so wird stets nur der nfache Betrag fällig. Wie leicht einzusehen ist, ergibt sich für diesen Fall die einfache Formel:

$$(97) \qquad A^{<1}_{x,n} = \frac{R_x - R_{x+n}}{D_x} .$$

In der Praxis kommen Versicherungen mit veränderlicher Leistung der Gesellschaft bisweilen in der Risikoversicherung vor, wobei dann die Summe von Jahr zu Jahr abnimmt. Versicherungen mit steigender Versicherungssumme kommen als Zusatzversicherungen hie und da in besonderen Tarifen sowie auch in der noch zu besprechenden Versicherung mit Prämienrückgewähr vor.

12. Kapitel.

Die Beziehungen zwischen den Zahlen der Lebenden und denen der Toten.

Die Grundformel

$$p_x + q_x = 1$$

legt schon die Vermutung nahe, daß zwischen den Zahlen der Lebenden und denen der Toten bestimmte Beziehungen bestehen müssen. Zunächst folgt aus der Grundgleichung ohne weiteres:

$$\frac{l_{x+1}}{l_x} + \frac{d_x}{l_x} = 1 \qquad \text{und alsdann:}$$

$$l_{x+1} + d_x = l_x ,$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} ,$$

$$v^{x+1} \cdot d_x = v^{x+1} \cdot l_x - v^{x+1} \cdot l_{x+1} ,$$

$$(98) \qquad C_x = v \cdot D_x - D_{x+1} .$$

Bildet man von den beiden Seiten der Gleichung die bis ans Ende der Sterblichkeitstafel durchgeführte Summe, so erhält man:

$$\Sigma C_x = v \cdot \Sigma D_x - \Sigma D_{x+1}$$

und alsdann:

$$M_x = v \cdot N_x - N_{x+1},$$

$$M_x = v \cdot N_x - N_x + D_x,$$

$$M_x = D_x - (1-v) N_x,$$

$$(99) \qquad M_x = D_x - d \cdot N_x.$$

Bildet man auch hiervon wieder die Summen, so ergibt sich:

$$\Sigma M_x = \Sigma D_x - d \cdot \Sigma N_x,$$

$$(100) \qquad R_x = N_x - d \cdot S_x.$$

Mit Hilfe dieser Beziehungsgleichungen lassen sich die Summenbarwerte, also die einmaligen Prämien der Todesfallversicherung, in oft recht zweckmäßiger Weise umgestalten. In der lebenslänglichen Kapitalversicherung auf den Todesfall zum Beispiel geht der Ausdruck für die einmalige Prämie mit Hilfe der Formel (99) über in die Form:

$$A_x = \frac{M_x}{D_x} = \frac{D_x - d \cdot N_x}{D_x} = 1 - d \cdot \frac{N_x}{D_x},$$

sodaß man also die einfache Formel

$$(101) \qquad A_x = 1 - d \cdot a_x$$

erhält. Wendet man dieselbe Beziehungsgleichung (99) auf die Formel an, die für die einmalige Prämie der gemischten Versicherung Geltung hat, so erhält man der Reihe nach:

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x},$$

$$A_{x,\overline{n}|} = \frac{(D_x - d \cdot N_x) - (D_{x+n} - d \cdot N_{x+n}) + D_{x+n}}{D_x},$$

$$A_{x,\overline{n|}} = \frac{D_x - d \cdot [N_x - N_{x+n}]}{D_x} = 1 - \frac{d \cdot [N_x - N_{x+n}]}{D_x} ,$$

$$A_{x,\overline{n|}} = 1 - d \cdot a_{x,\overline{n|}} . \tag{102}$$

Hier sei bemerkt, daß sich nunmehr der Formel ($73^{\underline{a}}$) auch die Form geben läßt:

$$\mathfrak{A} = (1 - d \cdot a) + \alpha + \beta \cdot a ,$$

$$\mathfrak{A} = (1 + \alpha) - (d - \beta) \cdot a , \tag{$73^{\underline{c}}$}$$

die namentlich für die Berechnung von Tarifen sehr bequem ist.

Die Formeln dieser Art lassen auch eine logische Deutung zu. Man kann nämlich diese Formeln folgendermaßen erklären:

Angenommen, die Gesellschaft gäbe dem Versicherungsnehmer die Summe 1 sofort, so hätte sie dafür, wenn es sich um eine Versicherung auf Lebenszeit handelt, den vorschüssigen Zins der Einheit, also den Jahresbetrag $d = \frac{i}{1+i}$ solange zu erhalten, als der Versicherte am Leben bleibt. Der Gegenwert wäre also ausgedrückt durch das Produkt $d \cdot a_x$. Der Unterschied zwischen der Summe 1 und diesem Barwert der Zinsleistung muß den Barwert der Versicherung ausmachen. Dasselbe gilt für die gemischte Versicherung, mit der Änderung jedoch, daß hier die Gesellschaft den vorschüssigen Zins der Einheit längstens n Jahre hindurch zu fordern hat. Denn wenn die Versicherungsdauer abläuft, dann hat der Versicherungsnehmer unbedingt Anspruch auf die Summe 1.

Anders verhält es sich bei der Todesfallversicherung mit Wartefrist. Wenn man für diese Versicherung den Barwert mit Hilfe der Beziehungsgleichung (99) umformt, so erhält man:

$${}_{n|}A_x = \frac{M_{x+n}}{D_x} = \frac{D_{x+n} - d \cdot N_{x+n}}{D_x} ,$$

$$_{n|}A_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} - d\,\frac{N_{x+n}}{D_x}\,, \qquad \text{also:}$$

(103) $$_{n|}A_x = {}_nE_x - d \cdot {}_{n|}a_x\,.$$

Die logische Bedeutung dieser Formel ist die, daß bei dieser Versicherung die Gesellschaft unter keinen Umständen die Summe 1 sofort hergeben könnte, da es, von der wirtschaftlichen Unmöglichkeit eines solchen Verfahrens ganz abgesehen, doch noch nicht bestimmt ist, ob der Versicherte nach n Jahren noch am Leben sein wird oder nicht. Die Bedingung, daß der Versicherte am Leben ist, müßte aber erfüllt sein, weil sonst ein Anspruch gegen die Gesellschaft nicht geltend gemacht werden könnte. Die Gesellschaft könnte somit die Summe 1 überhaupt nicht hergeben; sie könnte vielmehr nur den Wert hergeben, der im Zeitraum von n Jahren durch „Vererbung" zur Summe 1 anwächst, wenn der Versicherte während der ganzen Zeit am Leben bleibt. Das aber ist der Wert $_nE_x$.

Für die Risikoversicherung ergeben sich zunächst die folgenden neuen Formeln:

(104a) $$_nA_x = A_{x,\overline{n}|} - {}_nE_x \qquad \text{und}$$

(104b) $$_nA_x = 1 - d \cdot a_{x,\overline{n}|} - {}_nE_x\,.$$

Es ist jedoch auch möglich, den Barwert der Erlebensfallversicherung durch Rentenbarwerte auszudrücken. Denn schließlich ist doch der Barwert einer Erlebensfallversicherung weiter nichts als der Barwert einer nur ein einziges Mal auszuzahlenden Rente. Es ist also entweder:

(105a) $$_nE_x = {}_{n|}a_x - {}_{n|}\mathit{a}_x \qquad \text{oder:}$$

(105b) $$_nE_x = {}_{n|}a_x - {}_{n+1|}a_x$$

oder noch bequemer:

(105c) $$_nE_x = a_{x,\overline{n+1}|} - a_{x,\overline{n}|}\,.$$

Es ist also möglich, alle Summenbarwerte durch Rentenbarwerte auszudrücken.

Für die Risikoversicherung zum Beispiel erhielte man der Reihe nach:

$$_n\mathrm{A}_x = 1 - d \cdot \mathrm{a}_{x,\overline{n}\rceil} - {}_n\mathrm{E}_x\,,$$

$$_n\mathrm{A}_x = 1 - d \cdot \mathrm{a}_{x,\overline{n}\rceil} - \mathrm{a}_{x,\overline{n+1}\rceil} + \mathrm{a}_{x,\overline{n}\rceil}\,,$$

$$_n\mathrm{A}_x = 1 - [(1-v)\,\mathrm{a}_{x,\overline{n}\rceil} - \mathrm{a}_{x,\overline{n}\rceil}] - \mathrm{a}_{x,\overline{n+1}\rceil}\,,$$

$$(104\underline{^c}) \qquad {}_n\mathrm{A}_x = 1 + v \cdot \mathrm{a}_{x,\overline{n}\rceil} - \mathrm{a}_{x,\overline{n+1}\rceil}$$

und, weil $(\mathrm{a}_{x,\overline{n+1}\rceil} - 1) = a_{x,\overline{n}\rceil}$ ist, dann weiter

$$(104\underline{^d}) \qquad {}_n\mathrm{A}_x = v \cdot \mathrm{a}_{x,\overline{n}\rceil} - a_{x,\overline{n}\rceil}\,,$$

woraus sich, um das hier gleich zu bemerken, für die laufende Prämie die einfache Formel

$$(106) \qquad {}_n\mathrm{P}_x = v - \frac{a_{x,\overline{n}\rceil}}{\mathrm{a}_{x,\overline{n}\rceil}}$$

ergibt. Für den Grenzfall, daß die Sterblichkeit keine Rolle spielt, muß diese Prämie zu null werden. In der Tat ist, weil dann die Leibrentenbarwerte in Zeitrentenbarwerte übergehen, $a_{\overline{n}\rceil} = v \cdot \mathrm{a}_{\overline{n}\rceil}$, also $_n\overline{\mathrm{P}}_x = v - v = 0$.

Die Beziehungen zwischen den Zahlen der Lebenden und denen der Toten leisten auch gute Dienste, wenn es sich um Versicherungen mit veränderlicher Auszahlung handelt. So läßt sich zum Beispiel der Barwert einer Versicherung, aus der beim Ableben im 1. Jahre die Summe 1, im 2. Jahre die Summe 2, im 3. Jahre die Summe 3 usw., im n-ten Jahre und im Erlebensfall nach n Jahren die Summe n fällig werden soll (Formel (95), leicht ersetzen durch den Ausdruck:

$$\mathrm{A}^{<1}_{x,\overline{n}\rceil} = \frac{(\mathrm{N}_x - d.\mathrm{S}_x) - (\mathrm{N}_{x+n} - d\cdot\mathrm{S}_{x+n}) - n(\mathrm{D}_{x+n} - d\cdot\mathrm{N}_{x+n}) + n\cdot\mathrm{D}_{x+n}}{\mathrm{D}_x}\,,$$

woraus dann weiter folgt:

$$(107\underline{^a}) \quad \mathrm{A}^{<1}_{x,\overline{n}\rceil} = \frac{(\mathrm{N}_x - \mathrm{N}_{x+n}) - d\cdot(\mathrm{S}_x - \mathrm{S}_{x+n} - n\cdot\mathrm{N}_{x+n})}{\mathrm{D}_x}$$

oder: $$A^{<1}_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} - d \cdot a'_{x,\overline{n}|} \,,$$

(107b) $$A^{<1}_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} - d \cdot \overset{<}{a}_{x,\overline{n}|} \,,$$

wobei dann mit $\overset{<}{a}_{x,\overline{n}|}$ der Barwert der mit dem Auszahlungswert 1 beginnenden und alljährlich um die Einheit steigenden abgekürzten Rente bezeichnet ist.

Da die Summenbarwerte stets durch Rentenbarwerte ersetzt werden können, so lassen sich auch die Nettojahresprämien stets durch Rentenbarwerte ausdrücken. Stimmt dabei die Versicherungsdauer mit der Prämienzahlungsdauer überein, so ergeben sich besonders einfache Formeln. Für die Versicherung auf Lebenszeit mit lebenslänglicher Prämienzahlung ergibt sich zum Beispiel die Umformung:

(108) $$P_x = \frac{A_x}{a_x} = \frac{1 - d \cdot a_x}{a_x} = \frac{1}{a_x} - d \,.$$

In derselben Weise erhält man für die gemischte Versicherung:

(109) $$P_{x,\overline{n}|} = \frac{A_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|}} = \frac{1 - d \cdot a_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|}} = \frac{1}{a_{x,\overline{n}|}} - d \,.$$

Vorausgesetzt ist dabei, daß auch die Art der Prämienleistung der Art der Summenleistung entspricht, daß also zum Beispiel nicht etwa fallende oder steigende Prämien gezahlt werden sollen. Sollen veränderliche Prämien gezahlt werden, oder stimmt die Prämienzahlungsdauer mit der Versicherungsdauer nicht überein, so ist die allgemeine Formel

(110) $$P = \frac{1 - d \cdot a_1}{a_2}$$

anzuwenden, wobei mit a_1 der Barwert bezeichnet ist, der der Versicherungsform entspricht, während der Barwert a_2 der Form der Prämienzahlung anzupassen ist. Handelt es sich zum Beispiel um die häufig vorkommende Todesfall-

versicherung auf Lebenszeit mit abgekürzter Prämienzahlung, so ist:

$$(111) \qquad {}_nP_x = \frac{1 - d \cdot a_x}{a_{x,\overline{n}|}} .$$

Es empfiehlt sich, mit den Beziehungen, die zwischen den Zahlen der Lebenden und denen der Toten bestehen, die bisher besprochenen Formeln nach Möglichkeit umzugestalten. Auf eine besondere Beziehung und ihre Bedeutung sei dabei noch hingewiesen:

Ist die Versicherungsform mit der Prämienzahlungsform gleichartig, so gilt die allgemeine Gleichung:

$$P = \frac{1}{a} - d .$$

Mit dem Ausdruck $\frac{1}{a}$, also dem reziproken Barwert der Rente wird aber gleichzeitig auch der Jahresbetrag angegeben, der dazu dient, die einmaligen Unkosten 1 im Laufe der Prämienzahlungsdauer zu tilgen. Denn der Betrag der einmaligen Unkosten ist ein Gegenwartswert, also ein Barwert; wenn dieser Betrag auf eine bestimmte Anzahl von Jahren verteilt und während der festgesetzten Dauer mit den Prämien abgetragen (amortisiert) werden soll, so muß er mit dem Barwert einer Rente dividiert werden.

Man gibt bisweilen die Tilgungsquote nicht für die Einheit der Unkosten, sondern für den Unkostenbetrag 10 an. Demgemäß setzt man:

$$z = \frac{10}{a} ,$$

und man erhält dann weiter:

$$P = \frac{z}{10} - d ,$$

also:

$$(112) \qquad P + d = \frac{z}{10} ,$$

und:

$$(113) \qquad z = 10\,[P + d] .$$

In ähnlicher Weise kann man alle Werte einer bestimmten Gattung durch Werte einer anderen Gattung ersetzen. Sind zum Beispiel in einer tabellarischen Zusammenstellung nur die Rentenbarwerte enthalten, so kann man trotzdem sowohl die einmaligen Prämien wie auch die Nettojahresprämien damit berechnen. Umgekehrt kann man sich auch, wenn zum Beispiel nur die Summenbarwerte oder nur die Nettojahresprämien gegeben sind, daraus die sämtlichen übrigen Werte herstellen.

Sind zum Beispiel für die gemischte Versicherung nur die Summenbarwerte $A_{x,\overline{n}|}$ gegeben, so hat man die Gleichung:

$$A_{x,\overline{n}|} = 1 - d \cdot a_{x,\overline{n}|} .$$

Man erhält also weiter die Formel:

$$a_{x,\overline{n}|} = \frac{1}{d}\left[1 - A_{x,\overline{n}|}\right] . \tag{114a}$$

Damit sind dann auch die Nettojahresprämien bestimmt.

Sind nur die Nettojahresprämien gegeben, so geht man aus von der Gleichung:

$$P_{x,\overline{n}|} = \frac{1}{a_{x,\overline{n}|}} - d .$$

Man kommt dann ohne weiteres zu der Formel:

$$a_{x,\overline{n}|} = \frac{1}{P_{x,\overline{n}|} + d} . \tag{114b}$$

Damit erhält man dann auch die Summenbarwerte nach der Formel:

$$A_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} \cdot P_{x,\overline{n}|} . \tag{115}$$

Dergleichen Beziehungen werden in der Praxis sehr häufig ausgenutzt, umsomehr, als damit oft die tabellarische Berechnung wesentlich vereinfacht werden kann.

13. Kapitel.

Die Beziehungen zwischen den Barwerten und den Endwerten in der Lebensversicherung.

Wie es in der Zinsrechnung Summenbarwerte und Summenendwerte, Rentenbarwerte und Rentenendwerte gibt, so gibt es solche Werte auch in der eigentlichen Lebensversicherungsrechnung. Von den Barwerten ist schon eingehend die Rede gewesen, von den Endwerten dagegen bisher noch nicht. Namentlich sind es die Rentenendwerte und ihre Beziehungen zu den Barwerten, denen eine große Bedeutung zukommt.

Ein Rentenbarwert ist der gegenwärtige Wert aller Rentenbeträge, die während der Versicherungsdauer voraussichtlich fällig werden. Die Rentenbeträge sind dabei gleich der Einheit. Der Barwert einer Leibrente läßt sich demgemäß auch als eine Reihensumme schreiben, die der Reihensumme des Barwertes der Zeitrente völlig gleichartig ist. Schreibt man den Barwert der Zeitrente als Reihe, so hat man die Form:

(116a) $$a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + v^3 + \ldots\ldots + v^{n-1}.$$

Für den Barwert der Leibrente erhält man die ganz analog gebildete Reihe:

(116b) $$a_{x,\overline{n}|} = 1 + v \cdot {}_1p_x + v^2 \cdot {}_2p_x + v^3 \cdot {}_3p_x + \ldots + v^{n-1} \cdot {}_{n-1}p_x.$$

Diese Reihe ergibt sich von selbst aus der Erklärung des Leibrentenbarwertes, der doch weiter nichts ist als eine Summe von Erlebensfallbarwerten. In diesem Sinne kann man den Barwert der Zeitrente überhaupt als einen Sonderfall des allgemeinen Rentenbarwertes ansehen, als den Fall nämlich, für den die Wahrscheinlichkeit jeder Renten-

fälligkeit gleich 1 zu setzen ist, weil diese Wahrscheinlichkeit eine Gewißheit ist.

Umgekehrt kann man für die Leibrente auch einen Endwert bilden. Man hat dann die einzelnen Summanden der Reihe nicht als abgezinste, sondern als aufgezinste Beträge einzusetzen. Die Verzinsung allein genügt dabei aber nicht; die einzelnen Beträge müssen vielmehr „vererbt" werden. Die Vererbung ist eine erweiterte Form der Verzinsung.

Wenn l_x Personen je den Betrag der Einheit ein Jahr hindurch auf Zinsen legen, so ist nach einem Jahre vorhanden das Guthaben $l_x \cdot (1+i)$. Jeder der l_x Einleger kann dabei für sich den Betrag $(1+i)$ zurückfordern. Die Einheit der Summe wäre dann verzinst worden. Wenn aber l_x Personen je den Betrag der Einheit mit der weiteren Bedingung auf Zinsen legen, daß das nach einem Jahre vorhandene Guthaben nur an die l_{x+1} Personen verteilt werden soll, die alsdann noch am Leben sind, so erhält jeder einzelne der dann noch lebenden l_{x+1} Personen mehr als den Betrag der um den Zins vermehrten Einheit. Denn es ist nach einem Jahre vorhanden das Guthaben $l_x \cdot (1+i)$, das dann unter l_{x+1} Personen verteilt werden kann. Jeder einzelne erhält also den Betrag:

$$(117\underline{^a}) \qquad \varphi_x = (1+i)\,\frac{l_x}{l_{x+1}}\,.$$

Dann ist die Summe der Einheit vererbt worden. Man erhält dabei für φ_x auch den Ausdruck:

$$(117\underline{^b}) \qquad \varphi_x = \frac{l_x}{v \cdot l_{x+1}} = \frac{v^x \cdot l_x}{v^{x+1} \cdot l_{x+1}} = \frac{D_x}{D_{x+1}}\,.$$

Dieser Vererbungsfaktor φ_x entspricht in der Versicherungsrechnung vollständig dem in der Zinsrechnung gebräuchlichen Aufzinsungsfaktor $q = (1+i)$.

Die Vererbung kann sich ebenso wie die Verzinsung auf jeden beliebigen Zeitraum erstrecken. Man hat also in genauerer Bezeichnungsweise zunächst den Ausdruck:

$$(117c) \qquad {}_1\varphi_x = \frac{D_x}{D_{x+1}} ;$$

und wenn man dann die Vererbung allgemein auf n Jahre ausdehnt, so erhält man die Formel:

$$(118) \qquad {}_n\varphi_x = \frac{D_x}{D_{x+n}} = 1 : \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{1}{{}_nE_x} .$$

Der Ausdruck ${}_n\varphi_x$ ist ein dem Ausdruck $q^n = (1+i)^n$ entsprechender Summenendwert. Der Endwert ist, nebenbei bemerkt, dem Barwert ${}_nE_x$ zugeordnet.

Zinst man nun in der Zinsrechnung die wiederkehrenden Einlagen von Jahr zu Jahr auf, so erhält man den Zeitrentenendwert:

$$r_{\overline{n}|} = q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots + q^n .$$

Dieser Endwert ergibt sich für den Schluß des n-ten Jahres.

Vererbt man statt dessen die Einlagen von Jahr zu Jahr, so erhält man für den Schluß des ersten Jahres zunächst den Wert:

$$r_{x,\overline{1}|} = \frac{D_x}{D_{x+1}} .$$

Für den Schluß des zweiten Jahres erhält man dann den Ausdruck:

$$r_{x,\overline{2}|} = \left(\frac{D_x}{D_{x+1}} + 1\right)\left(\frac{D_{x+1}}{D_{x+2}}\right) = \frac{D_x}{D_{x+2}} + \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} .$$

Für den Schluß des dritten Jahres erhält man weiter den Ausdruck:

$$r_{x,\overline{2}|} = \left(\frac{D_x}{D_{x+2}} + \frac{D_{x+1}}{D_{x+2}} + 1\right)\left(\frac{D_{x+2}}{D_{x+3}}\right) = \frac{D_x}{D_{x+3}} + \frac{D_{x+1}}{D_{x+3}} + \frac{D_{x+2}}{D_{x+3}} .$$

Setzt man die Vererbung in dieser Weise fort, so erhält man schließlich für den Schluß des n-ten Jahres den Leibrentenendwert:

$$(119^{\underline{a}})\qquad r_{x,\overline{n|}} = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots\ldots + D_{x+n-1}}{D_{x+n}},$$

wofür man dann in einfacherer Schreibung die Formel

$$(119^{\underline{b}})\qquad r_{x,\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_{x+n}}$$

erhält. Dieser Formel kann man auch die folgende Fassung geben:

$$(119^{\underline{c}})\qquad r_{x,\overline{n|}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} : \frac{D_{x+n}}{D_x} = \frac{a_{x,\overline{n|}}}{{}_nE_x}.$$

Damit erhält man dann die wichtige Beziehungsgleichung:

$$(120^{\underline{a}})\qquad \frac{a_{x,\overline{n|}}}{r_{x,\overline{n|}}} = {}_nE_x ,$$

die vollständig der entsprechenden Beziehungsgleichung der Zeitrentenwerte entspricht (Vgl. die Gleichungen (15)!). Wie nämlich in der Zeitrentenrechnung das Verhältnis des Rentenbarwertes zum Rentenendwerte ausgedrückt ist durch den Barwert der nach n Jahren unbedingt auszuzahlenden Summe 1, so ist in der Leibrentenrechnung das Verhältnis des Rentenbarwertes zum Rentenendwerte ausgedrückt durch den Barwert der Summe 1, die nach n Jahren fällig wird, wenn der Versicherte alsdann noch am Leben ist.

Auch die Umkehrung der Gleichung ($120^{\underline{a}}$) hat ihre Bedeutung. Sie ergibt die Beziehung:

$$(120^{\underline{b}})\qquad \frac{r_{x,\overline{n|}}}{a_{x,\overline{n|}}} = \frac{1}{{}_nE_x} = {}_n\varphi_x ,$$

wobei mit ${}_n\varphi_x$, wie bereits dargelegt worden ist, der Betrag bezeichnet ist, der jedem einzelnen der l_{x+n} Überlebenden ausgezahlt werden kann, wenn l_x Personen n Jahre vorher den Betrag der Einheit eingezahlt haben.

14. Kapitel.

Das Deckungskapital und die Risikoprämie.

Wenn für eine Versicherung auf Lebenszeit die „natürliche Prämie“ Π_x entrichtet wird, die sich also entsprechend der mit dem Alter zunehmenden Sterbegefahr von Jahr zu Jahr erhöht, so wird diese Prämie rechnungsmäßig zur Auszahlung der Schadensummen alljährlich verbraucht, ähnlich wie zum Beispiel die für eine Feuerversicherung entrichtete Prämie zur Auszahlung der Brandschadensummen alljährlich aufgebraucht wird; und wie in der Brandschadenversicherung der Versicherungsnehmer grundsätzlich nicht verlangen kann, daß ihm auch nur ein Teil der eingezahlten Prämien zurückgegeben werde, so geht das auch in der Todesfallversicherung nicht an, sobald eine solche Versicherung zur natürlichen Prämie abgeschlossen worden ist. Die Versicherung zur natürlichen Prämie kommt aber nur ganz vereinzelt vor. Namentlich, wenn jemand eine Todesfallversicherung auf Lebenszeit mit lebenslänglicher Prämienzahlung abschließt, wählt er statt dessen vorteilhafter die gleichbleibende Durchschnittsprämie. Die dieser Durchschnittsprämie entsprechende Nettojahresprämie ist anfangs höher als die natürliche Prämie. Es kann also aus der Nettoprämie zunächst alljährlich etwas zurückgelegt werden. Den zurückgelegten Beträgen sind die rechnungsmäßigen Zinsen zuzuschreiben. Später, wenn das Wagnis größer wird, weil der Versicherte in die höheren Altersklassen kommt, wenn also die natürliche Prämie höher ausfallen müßte als die wirklich gezahlte Durchschnittsnettoprämie, muß nötigenfalls aus den Rücklagen zur Deckung des Unterschiedes alljährlich ein entsprechender Betrag herausgenommen werden. Die natürliche Prämie ist dabei aber nicht mehr mit ihrem vollen Werte zugrunde zu legen, sondern nur noch mit einem verringerten Betrage, weil

nicht mehr die volle Versicherungssumme, sondern nur noch ein Teil davon unter Wagnis steht. Denn der bereits zurückgelegte Betrag kann im Schadenfalle zur Deckung herangezogen werden.

Das, was zunächst zur Deckung des Wagnisses nicht gebraucht wird, was also über die Risikoprämie hinaus vom Versicherungsnehmer eingezahlt ist, wird bisweilen auch als Sparprämie bezeichnet. Zu einer solchen „technischen" Sparprämie kommt meist noch eine „wirtschaftliche" Sparprämie hinzu, die zur Kapitalansammlung zu dienen hat. Die zurückgelegten und rechnungsmäßig verzinsten Sparprämien bilden dann in ihrer Gesamtheit das Deckungskapital. Man hat das Deckungskapital früher fast allgemein als die Prämienreserve bezeichnet und bedient sich auch jetzt noch vielfach dieses Ausdrucks. Der Ausdruck ist aber nicht genau, da neben den Sparprämien, also den Rücklagen, aus denen das Deckungskapital aufgebaut wird, oft auch noch andere Beträge aus den eingezahlten Prämien „reserviert" werden. Zum mindesten müßte man also, wenn man das Deckungskapital meint, von der Nettoprämienreserve sprechen.

Die Sprapräme nun, aus der das Deckungskapital aufgebaut wird, ist im Verhältnis um so größer, je schneller die Prämienzahlung ihr Ende erreicht und je schneller der Zeitpunkt herannaht, mit dem etwa das versicherte Kapital endgültig fällig werden soll. Ist die Versicherungsform so gewählt, daß ein endgültiger Auszahlungstermin überhaupt nicht vorgesehen ist, so werden die anfangs zurückgelegten Sparprämien allmählich wieder aufgezehrt. Das geschieht zum Beispiel in der Risikoversicherung, für die die Sparprämie meist ziemlich klein ausfällt, wenn die Versicherung mit kurzer Dauer abgeschlossen wird.

Für die lebenslängliche Todesfallversicherung gilt als Alter der endgültigen Auszahlung das auf das höchste in der Sterblichkeitstafel mit einem Wert von l_x noch vorkommende Lebensalter unmittelbar folgende Altersjahr, also das Alter ω.

Die Höhe der Sparprämie hängt selbstverständlich auch ab von der Art und der Dauer der bedungenen Prämienzahlung. Die Sparprämie ändert sich außerdem von Jahr zu Jahr entsprechend der Veränderung der Wagnisprämie. Sie richtet sich dabei ebenso wie die Wagnisprämie auch nach der Höhe des bereits zurückgestellten Deckungskapitals. Wagnisprämie und Sparprämie sind also scheinbar recht verwickelte Begriffe; ihre Berechnung gestaltet sich aber erheblich einfacher, als es zunächst den Anschein hat.

Auch in der Versicherung auf den Lebensfall gibt es den Begriff des Deckungskapitals. Indes wird in der Lebensfallversicherung nicht, wie in der Todesfallversicherung, alljährlich ein bestimmter Betrag zur Deckung des Wagnisses verbraucht; es wird im Gegenteil, da kein Todesfallwagnis zu tragen ist, da die Leistung der Gesellschaft vielmehr nur im Erlebensfalle fällig wird, aus den beim Ableben der Versicherten freiwerdenden Deckungskapitalen alljährlich ein bestimmter Betrag an die Gesamtheit der Überlebenden vererbt. Die Wagnisprämie ist also negativ. Unter den freiwerdenden Deckungskapitalen sind die Beträge zu verstehen, die der Gesamtheit dadurch anheimfallen, daß ein Teil der Versicherten stirbt, bevor die vereinbarte Leistung fällig geworden ist. Auch wenn schon Leistungen fällig geworden sind, also in der Rentenversicherung, findet eine solche Vererbung statt.

Man kann das Deckungskapital prospektiv oder retrospektiv berechnen; in der Praxis wird es meist prospektiv berechnet. Man erklärt es dann sinngemäß als den Unterschied des Barwertes aller zukünftigen Leistungen der Gesellschaft und aller zukünftigen Gegenleistungen des Versicherungsnehmers. Die zukünftigen Leistungen der Gesellschaft sind ausgedrückt durch den Barwert der Versicherung, also durch die einmalige Nettoprämie, die in dem Zeitpunkt zu erheben wäre, für den das Deckungskapital berechnet werden soll. Die zukünftigen Gegenleistungen sind ausgedrückt durch den Barwert aller noch ausstehenden Prämien. Es ist das also ein Rentenbarwert, der aber nicht für die Einheit

der Summe, sondern für den Betrag der entsprechenden Nettoprämie gilt. Auch dieser Rentenbarwert ist für das inzwischen erreichte Alter zu berechnen. Es ergibt sich somit für die Berechnung des Deckungskapitals die grundlegende Formel:

$$(121^{\underline{a}}) \qquad {}_mV = A_m - P \cdot a_m\,,$$

die wir ja auch in der Sparversicherung schon kennen gelernt haben (vgl. Formel (27)!). Mit m ist dabei die am Berechnungstermin gerade abgelaufene Versicherungsdauer bezeichnet. A_m bedeutet die einmalige Nettoprämie für das im Zeitpunkte der Berechnung erreichte Alter, P bedeutet die Nettojahresprämie des Eintrittsalters, und mit a_m ist der Barwert der Leibrente 1 bezeichnet, die der Prämienzahlungsart entspricht; dieser Barwert gilt ebenfalls für das erreichte Alter. Zu beachten ist, daß A_m stets von der Form der Versicherung, a_m dagegen von der Art der Prämienzahlung bestimmt wird; es liegt also ein ähnliches Verhältnis vor wie in der allgemeinen Gleichung $A = P \cdot a$.

Ersetzt man übrigens mit Hilfe dieser Gleichung die Nettojahresprämie, so erhält man die abgeänderte Grundformel:

$$(121^{\underline{b}}) \qquad {}_mV = A_m - \frac{a_m}{a} A\,,$$

worin deutlich zum Ausdruck kommt, daß das Deckungskapital seinem Charakter nach ein Summenbarwert ist. Denn $\frac{a_m}{a}$ ist eine Verhältniszahl von der Art eines Koeffizienten. Man könnte also geradezu schreiben:

$$(121^{\underline{c}}) \qquad {}_mV = A_m - \vartheta_m \cdot A\,, \qquad \vartheta_m = \frac{a_m}{a}\,,$$

womit man dann das Deckungskapital deutlich als Differenz zweier Barwerte dargestellt hätte.

Die Grundformel ($121^{\underline{a}}$) eignet sich im besonderen Maße zur Berechnung des Deckungskapitals einzelner Versiche-

rungen, umsomehr als in der Praxis die Nettoprämien und die Barwerte meist tabellarisch zusammengestellt sind. Es läßt sich übrigens auch eine einfache Merkregel angeben, mit deren Hilfe die Grundformel ($121^{\underline{a}}$) mechanisch angewendet werden kann. Diese Merkregel lautet folgendermaßen:

Man setzt in der Weise, wie die rechte Seite der Gleichung ($121^{\underline{a}}$) das fordert, drei Bruchstriche zusammen, die also die folgende Form annehmen:

$$\frac{\mathrm{I}}{\qquad} - \frac{\mathrm{II}}{\qquad} \cdot \frac{\mathrm{III}}{\qquad}.$$

Zunächst setzt man dann als Nenner der beiden Bruchstriche I und III den Wert D_{x+m} ein, also die diskontierte Zahl der Lebenden für das im Zeitpunkte der Berechnung erreichte Alter $(x+m)$. Alsdann füllt man den Bruchstrich II in der Weise aus, daß man die für die Berechnung des Deckungskapitals geltende Nettojahresprämie darauf einträgt. Endlich überträgt man dann den Zähler des Bruchstriches II auf den Zähler des Bruchstriches I und den Nenner des Bruchstriches II auf den Zähler des Bruchstriches III, indem man dabei die festliegenden (noch nicht der Vergangenheit angehörenden) Endalter unverändert bestehen läßt, die nicht festliegenden, (bereits der Vergangenheit angehörenden) Alter dagegen durch das Alter $(x+m)$ ersetzt. Wenn man diese Regeln sinngemäß anwendet, dann kann man meist für das Deckungskapital mechanisch die Formel aufstellen. Man wird natürlich gut tun, die mechanische Merkregel nur als Hilfsmittel anzuwenden, sich über die Bedeutung der Ausdrücke also stets klar zu werden.

Hat man zum Beispiel für die mit einer Wartefrist verbundene gemischte Versicherung auf den Todes- und den Lebensfall das Deckungskapital für den Schluß des m-ten Versicherungsjahres zu bestimmen, und ist die Wartefrist auf t Jahre, die gesamte Versicherungsdauer auf n Jahre festgesetzt, so ist darauf zu achten, ob $m < t$ oder ob $m > t$ ist. Ist $m < t$, so erhält man das Deckungskapital:

$$ {}_mV_x = \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+m}} $$
$$ - \frac{M_{x+t} - M_{x+n} + D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \frac{N_{x+m} - N_{x+n}}{D_{x+m}} . $$

Denn in diesem Falle ist auf dem ersten Bruchstrich der Ausdruck M_{x+t} unverändert zu lassen, da das Alter festliegt und noch nicht erreicht ist. Ist dagegen $m > t$, so lautet der erste Bruchstrich:

$$ \frac{M_{x+m} - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_{x+m}} . $$

Denn dann gehört das Alter $(x+t)$ bereits der Vergangenheit an; der Barwert der Versicherung unterscheidet sich dann also nicht mehr von dem entsprechenden Barwert einer gemischten Versicherung ohne Wartefrist. Der Unterschied kommt nur noch darin zum Ausdruck, daß die Nettojahresprämie für eine Versicherung mit Wartefrist Geltung hat. Ist $m = t$, so haben beide Formeln gleichzeitig Geltung.

Die Formel ($121^{\underline{a}}$) läßt sich mit Hilfe der Grundformel $P = \frac{A}{a}$ auch in anderer Weise umformen. Man kann aus der Grundformel die Gleichung

$$ A_m = P_m \cdot a_m $$

herleiten und damit für das Deckungskapital die neue Formel

$$ (121^{\underline{d}}) \qquad {}_mV = a_m \cdot [P_m - P] $$

bilden. Diese Formel erweist sich vielfach als praktisch, wenn es sich darum handelt, für bestimmte Tarife die Deckungskapitale tabellarisch zu berechnen. Man könnte auch

$$ a_m = \frac{A_m}{P_m} $$

einsetzen und hätte dann die weitere Formel:

$$ (121^{\underline{e}}) \qquad {}_mV = A_m \cdot \left[1 - \frac{P}{P_m}\right] , $$

die wegen des darin vorkommenden Bruches allerdings weniger bequem ist als die anderen Formeln (121).

Die wichtigste Formel erhält man indes, wenn man berücksichtigt, daß man alle anders gearteten Werte durch Rentenbarwerte ausdrücken kann. Praktischen Wert hat diese Art der Umformung allerdings nur dann, wenn es sich um die nur vereinzelt vorkommende Versicherung auf Lebenszeit mit lebenslänglicher Prämienzahlung, und wenn es sich um die dafür um so häufiger vorkommende gemischte Versicherung handelt. Dann gilt nämlich die allgemeine Gleichung:

$$A_m = 1 - d \cdot a_m$$

sowie auch die weitere Beziehungsgleichung:

$$P = \frac{1}{a} - d\ ,$$

mit deren Hilfe sich der Ausdruck

$${}_mV = (1 - d \cdot a_m) - \left(\frac{1}{a} - d\right) \cdot a_m$$

ergibt, der dann die einfache Formel

$$(122\underline{\text{a}})\qquad {}_mV = 1 - \frac{a_m}{a}$$

zur Folge hat. Bedient man sich hier der genaueren Bezeichnungsweise, so erhält man für die Versicherung auf Lebenszeit mit lebenslänglicher Prämienzahlung die besondere Formel:

$$(122\underline{\text{b}})\qquad {}_mV_x = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x}$$

und für die gemischte Versicherung ebenfalls die besondere Formel:

$$(122\underline{\text{c}})\qquad {}_mV_{x,\overline{n|}} = 1 - \frac{a_{x+m,\overline{n-m|}}}{a_{x,\overline{n|}}}\ .$$

Diese Formeln lassen sich auch in der Weise für die tabellarische Berechnung praktisch abändern, daß man den in der

allgemeinen Gleichung ($122^{\underline{a}}$) vorkommenden Ausdruck $\frac{1}{a}$ mit Hilfe der Beziehungsgleichung

$$P = \frac{1}{a} - d$$

ersetzt. Man erhält dann die neue Form:

$$(122^{\underline{d}}) \qquad {}_mV = 1 - a_m \cdot [P + d] \, ,$$

die ein sehr bequemes Rechnen ermöglicht, da $[P + d]$ für die einmal gewählte Versicherungsform eine Konstante ist. Liegt weder eine Versicherung auf Lebenszeit mit lebenslänglicher Prämienzahlung noch eine gemischte Versicherung vor, oder handelt es sich, wenn eine dieser beiden Formen vorliegt, um eine besondere Art der Prämienzahlung, so wird man sich meist der Formel ($121^{\underline{a}}$) bedienen. Möglich wäre es natürlich auch in solchen Fällen, das Deckungskapital ausschließlich durch Rentenbarwerte auszudrücken. So ergäben sich zum Beispiel für die reine Erlebensfallversicherung die folgenden Gleichungen:

$$A_m = {}_{n-m}E_{x+m} = a_{x+m,\, \overline{n-m+1}|} - a_{x+m,\, \overline{n-m}|} \, ,$$

$$P = \frac{{}_nE_x}{a_{x,\overline{n}|}} = \frac{a_{x,\, \overline{n+1}|} - a_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|}} \, ,$$

$$P = \frac{a_{x,\, \overline{n+1}|}}{a_{x,\overline{n}|}} - 1 \, ,$$

woraus dann weiter folgte:

$${}_mV_x = a_{x+m,\, \overline{n-m+1}|} - a_{x+m,\, \overline{n-m}|} - \left[\frac{a_{x,\, \overline{n+1}|}}{a_{x,\overline{n}|}} - 1\right] a_{x+m,\, \overline{n-m}|} \, ,$$

$${}_mV_x = a_{x+m,\, \overline{n-m+1}|} - \frac{a_{x,\, \overline{n+1}|}}{a_{x,\overline{n}|}} \cdot a_{x+m,\, \overline{n-m}|} \, ,$$

was meist nicht bequemer wäre als die mit Hilfe der Formel ($121^{\underline{a}}$) gebildete regelrechte Form:

$${}_mV_x = {}_{n-m}E_{x+m} - \frac{{}_nE_x}{a_{x,\overline{n}|}} \cdot a_{x+m,\, \overline{n-m}|} \, .$$

Ist für eine Versicherung die Prämienzahlungsdauer abgelaufen, oder ist die Versicherung überhaupt zur einmaligen Prämie abgeschlossen, so wird $a_m = 0$, da dann weiterhin keine Prämien mehr zu entrichten sind. Die Gegenleistung des Versicherungsnehmers fällt aus, und es bleibt einfach die Formel

$$(123) \qquad {}_mV' = A_m$$

übrig, die an sich selbstverständlich ist, weil das Deckungskapital als Barwert dann einfach mit dem Barwert der Versicherung, also mit der entsprechenden einmaligen Prämie des erreichten Alters zusammenfallen muß.

Wird das Deckungskapital retrospektiv berechnet, so wird es dargestellt als Unterschied zwischen dem für den Zeitpunkt der Berechnung geltenden Wert aller der Vergangenheit angehörenden Leistungen des Versicherungsnehmers und dem entsprechenden Wert der in der Vergangenheit von der Gesellschaft bereits aufgewendeten Gegenleistungen. Die Leistungen des Versicherungsnehmers haben darin bestanden, daß er die Prämien eingezahlt hat. Bei laufender Prämienzahlung haben die eingezahlten Nettoprämien nach m Jahren den Endwert $P_x \cdot r_{x,\overline{m|}}$ erreicht. Die Gegenleistung der Gesellschaft hat, wenn es sich um die Todesfallversicherung handelt, darin bestanden, daß inzwischen die Sterbfallsummen ausgezahlt worden sind. Der für den Berechnungstermin geltende Wert dieser Gegenleistung ist gleich dem vererbten Barwert einer kurzen Todesfallversicherung; er ist also dargestellt durch den Ausdruck ${}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x$. Für das retrospektiv berechnete Deckungskapital ergibt sich somit die Formel:

$$(124^{\underline{a}}) \qquad {}_mV_x = P_x \cdot r_{x,\overline{m|}} - {}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x$$

oder auch:

$$(124^{\underline{b}}) \quad {}_mV_x = \frac{P_x \cdot a_{x,\overline{m|}}}{{}_mE_x} - \frac{{}_mA_x}{{}_mE_x} = \left\{ P_x \cdot a_{x,\overline{m|}} - {}_mA_x \right\} \cdot {}_m\varphi_x \,.$$

In der Formel ($124^{\underline{a}}$) kommt wieder klar zum Ausdruck, daß das Deckungskapital als ein Unterschied bestimmter

Werte vom Charakter einmaliger Prämien anzusehen ist, nur daß es sich hier nicht um Barwerte, sondern um Endwerte handelt. Die Formel (124$\underline{\text{b}}$) läßt dabei deutlich erkennen, daß diese Endwerte leicht auf Barwerte zurückgeführt werden können, indem der Vererbungsfaktor aus den Endwerten ausgeschieden wird.

Berechnet man das Deckungskapital retrospektiv, so berücksichtigt man die besondere Form der Versicherung und die Art der Prämienzahlung ausschließlich in der Nettojahresprämie; die anderen Werte sind davon unabhängig.

Die Formel (124) läßt sich auch aus den Grundwerten aufbauen. Man hat dann folgendermaßen zu entwickeln: Die Gesellschaft erhält von l_x Personen die Nettojahresprämie P; diese zinst sie zunächst ein Jahr hindurch auf. Sie verfügt dann am Ende des Jahres im ganzen über den Betrag $P \cdot l_x\ (1+i)$. Nun zahlt die Gesellschaft für d_x Versicherungen die Sterbfallsummen 1 aus. Es verbleibt ihr dann noch der Betrag ${}_1G = P \cdot l_x (1+i) - d_x$. Dieser Betrag hat für die dann noch lebenden l_{x+1} Personen als Deckungskapital zu dienen. Auf jede Versicherung trifft mithin der Einzelwert:

$$ {}_1V = \frac{P \cdot l_x\,(1+i) - d_x}{l_{x+1}} \,. $$

Es ist dann aber:

$$ {}_1V = \frac{[P \cdot l_x (1+i)]\, v^{x+1} - d_x \cdot v^{x+1}}{l_{x+1} \cdot v^{x+1}} \,, \qquad \text{also:} $$

$$ {}_1V = \frac{P \cdot D_x - C_x}{D_{x+1}} \,. $$

Am Schlusse des 1. Jahres war nun für die l_{x+1} überlebenden Personen insgesamt vorhanden das Guthaben ${}_1G$. Dazu kommen zu Anfang des 2. Jahres wieder die laufenden Nettojahresprämien P, die nunmehr nur noch von l_{x+1} Personen entrichtet werden. Das Guthaben wird dadurch erhöht auf den Betrag $({}_1G + P \cdot l_{x+1})$, der dann wieder ein Jahr hindurch verzinst werden kann. Alsdann

hat die Gesellschaft am Schlusse des zweiten Jahres für d_{x+1} Versicherungen die Sterbfallsummen 1 auszuzahlen. Das zunächst um die Zinsen vermehrte Guthaben der Versicherungsnehmer vermindert sich dadurch also auf den Betrag:

$$_2G = [_1G + P \cdot l_{x+1}]\,[1 + i] - d_{x+1}.$$

Dieses Guthaben gilt nunmehr nur noch für die alsdann noch lebenden l_{x+2} Personen. Auf jeden einzelnen trifft also der Betrag des zweiten Deckungskapitals, der nach der Formel

$$_2V = \frac{[_1G + P \cdot l_{x+1}]\,[1 + i] - d_{x+1}}{l_{x+2}}$$

berechnet werden kann. Daraus ergibt sich dann weiter:

$$_2V = \frac{[P \cdot l_x (1 + i) - d_x + P \cdot l_{x+1}]\,[1 + i] - d_{x+1}}{l_{x+2}},$$

$$_2V = \frac{P \cdot l_x \cdot v^x - d_x \cdot v^{x+1} + P \cdot l_{x+1} \cdot v^{x+1} - d_{x+1} \cdot v^{x+2}}{l_{x+2} \cdot v^{x+2}}$$

und schließlich:

$$_2V = \frac{P\,(D_x + D_{x+1}) - (C_x + C_{x+1})}{D_{x+2}}.$$

Entwickelt man in derselben Weise weiter, so erhält man für den Schluß des m-ten Versicherungsjahres die Gleichung:

$$_mV = \frac{P \cdot \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m-1} D_{x+\mu} - \sum\limits_{\mu=0}^{\mu=m-1} C_{x+\mu}}{D_{x+m}}$$

und somit endlich die Formel:

$$(124\underline{c}) \quad _mV_x = \frac{P_x \cdot (N_x - N_{x+m})}{D_{x+m}} - \frac{(M_x - M_{x+m})}{D_{x+m}},$$

die mit der Formel ($124\underline{b}$) zusammenfällt, wenn man Zähler und Nenner mit D_x erweitert.

Liegt eine Versicherung auf den Lebensfall vor, so hat die Gesellschaft zunächst keinerlei Gegenleistungen aufzuwenden. Es ergibt sich dann also einfach die Gleichung:

$$ {}_mV_x = P_x \cdot r_{x,\overline{m}|} . \tag{125a} $$

Berücksichtigt man dabei, daß $P_x = \frac{{}_nE_x}{a_{x,\overline{n}|}} = \frac{1}{r_{x,\overline{n}|}}$ ist, so kann man der Formel auch die gefälligere Fassung geben:

$$ {}_mV_x = \frac{r_{x,\overline{m}|}}{r_{x,\overline{n}|}} . \tag{125b} $$

Wenn man umgekehrt berücksichtigt, daß

$$ r_{x,\overline{m}|} = \frac{a_{x,\overline{m}|}}{{}_mE_x} = \frac{1}{P_{\overline{m}|}} $$

ist, und wenn man zum Unterschied von dieser Nettojahresprämie $P_{\overline{m}|}$ die der Versicherung unmittelbar zugeordnete Nettojahresprämie mit $P_{\overline{n}|}$ bezeichnet, so erhält man die neue Formel:

$$ {}_mV = \frac{P_{\overline{n}|}}{P_{\overline{m}|}} . \tag{125c} $$

Auch hier findet man wieder eine vollständige Übereinstimmung zwischen den nur von der Verzinsung und den auch von der Sterblichkeit abhängigen Werten.

Für die Rentenversicherung ließe sich das Deckungskapital ebenfalls retrospektiv darstellen; nur müßte eine solche Entwicklung, da die von der Gesellschaft während der zurückgelegten Versicherungsdauer bereits ausgezahlten Rentenbeträge auch wieder durch einen Rentenendwert auszudrücken wären, schließlich zu derselben Formel führen, die sich ohne weiteres ergibt, wenn das Deckungskapital prospektiv dargestellt wird. Für die unmittelbar zahlbare Leibrente zum Beispiel ergibt sich nach m Jahren als prospektiv dargestelltes Deckungskapital der Wert ${}_mV_x = a_{x+m}$, gleichviel ob die Rente vorschüssig oder nachschüssig gezahlt wird. Denn auf jeden Fall kann man das Deckungskapital

so auffassen, daß man annimmt, die Zahlung der nächsten Rente stünde gerade bevor. Drückt man dasselbe Deckungskapital retrospektiv aus, so hat man als Endwert der eingezahlten Nettokaufsumme den vererbten Betrag $a_x \cdot {}_m\varphi_x$, wenn die Rente nachschüssig gezahlt wird. Der Endwert der Gegenleistungen wäre ausgedrückt durch den Rentenendwert $r_{x,\overline{m}|}$, wenn die Renten vorschüssig zu zahlen gewesen wären. Da sie nachschüssig zu zahlen waren, so ist die erste Zahlung, das heißt die Zahlung, die zu Beginn des ersten Versicherungsjahres zu leisten gewesen wäre, weggefallen. Es fehlt am Endwert also die m Jahre hindurch vererbte Summe 1. Mithin ergibt sich die Gleichung:

$$ {}_mV_x = \frac{a_x}{{}_mE_x} - \left[r_{x,\overline{m}|} - \frac{1}{{}_mE_x} \right], $$

und es folgt weiter:

$$ {}_mV_x = \frac{a_x + 1}{{}_mE_x} - r_{x,\overline{m}|}, $$

$$ {}_mV_x = \frac{a_x}{{}_mE_x} - \frac{a_{x,\overline{m}|}}{{}_mE_x} = \frac{{}_{m|}a_x}{{}_mE_x}, $$

also schließlich:

$$ {}_mV_x = \frac{N_{x+m}}{D_x} : \frac{D_{x+m}}{D_x} = \frac{N_{x+m}}{D_{x+m}} = a_{x+m}, $$

was zu erwarten war.

Liegt eine Versicherung mit veränderlicher Auszahlung vor, so erfordert die Aufstellung der Formel eine gewisse Achtsamkeit. Ist die Prämie veränderlich und ändert sie sich nur ein einziges Mal, indem sie sich nach t Jahren um einen bestimmten Satz ϱ erhöht oder ermäßigt, so wird man mit Vorteil das Deckungskapital retrospektiv berechnen, solange $m \leqq t$ ist. Ist dagegen $m \geqq t$, so wird man besser prospektiv rechnen. Man erreicht damit, daß man in beiden Fällen mit dem Barwert oder dem Endwert einer gleich-

bleibenden Rente rechnen kann. Ändert sich also die Anfangsprämie $P^{\lessgtr}$ nach t Jahren in der Weise, daß sie dann den festen Wert $P^{\vdash\!\dashv} = (1 \pm \varrho) \cdot P^{\lessgtr}$ annimmt, so rechnet man, solange $m \leqq t$ ist, nach der Formel:

$$(126\underline{a})\qquad {}_mV_x = P_x^{\lessgtr} \cdot r_{x,\overline{m}|} - {}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x \, .$$

Ist dagegen $m \geqq t$, so bedient man sich der Formel:

$$(126\underline{b})\qquad {}_mV_x = A_{x+m} - P^{\vdash\!\dashv} \cdot a_{x+m} \, .$$

Übrigens kann auch für $m \geqq t$ das Deckungskapital leicht retrospektiv dargestellt werden. Man kann nämlich ebenso gut, wie das bei einem Rentenbarwert der Fall ist, auch einen Rentenendwert als Wert einer veränderlichen Rente entwickeln. Man hat dann allgemein die Beziehungsgleichung:

$$r^{\lessgtr}_{x,\overline{n}|} = a^{\lessgtr}_{x,\overline{n}|} \cdot {}_n\varphi_x = \frac{a^{\lessgtr}_{x,\overline{n}|}}{{}_nE_x}$$

und erhält damit für das Deckungskapital die Formel:

$$(127)\qquad {}_mV_x = P_x^{\lessgtr} \cdot r^{\lessgtr}_{x,\overline{m}|} - {}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x \, .$$

Wenn Leistungen oder Gegenleistungen vorliegen, die sich von Jahr zu Jahr ändern, empfiehlt es sich fast stets, das Deckungskapital retrospektiv zu berechnen, also die Formel (127) sinngemäß anzuwenden. Rechnet man in solchen Fällen prospektiv, so bleibt nichts weiter übrig, als von dem nach m Jahren gerade geltenden Wert der Leistung oder der Gegenleistung auszugehen und die weitere Veränderung im Rentenbarwert entsprechend auszudrücken. Im Zweifelsfalle empfiehlt es sich dann, das Deckungskapital sowohl prospektiv wie auch retrospektiv zu berechnen. Stimmen die Ergebnisse überein, so ist nicht nur das Deckungskapital selbst richtig berechnet, sondern man hat im allgemeinen auch die Gewißheit, daß man die Nettojahresprämie richtig bestimmt hat.

In der Praxis wird meist nicht das volle, sondern ein gekürztes Deckungskapital zurückgestellt. Für eine Kürzung des Deckungskapitals kann man mit Recht die Tatsache anführen, daß die Gesellschaft für die Versicherung einmalige Unkosten verausgabt hat, die von ihr vorgelegt worden sind und die ihr erst im Laufe der Prämienzahlungsdauer ersetzt werden, indem der Versicherungsnehmer mit den Prämien alljährlich einen bestimmten Aufschlag einzahlt, durch den die von der Gesellschaft vorgelegten Kostenbeträge zu tilgen sind. Es kann billigerweise keiner Gesellschaft verdacht werden, wenn sie zum Nutzen des geordneten Betriebes wenigstens einen Teil der von ihr verausgabten einmaligen Unkosten gleich aus der ersten Jahresprämie deckt und dementsprechend das Deckungskapital verringert. Früher ließen sich die einmaligen Unkosten in dieser Weise nicht vollständig decken, weil das Versicherungsaufsichtsgesetz vom 12. Mai 1901 eine solche Deckung nur bis zum Betrage von 12½ fürs Tausend der Versicherungssumme zugelassen hat. Aber selbst wenn die Gesellschaft ihren Betrieb sehr sparsam verwaltet und vor allem die Abschlußprovision in engen Grenzen hält, wird dieser früher vom Gesetz zugelassene äußerste Abzug von 12½ ‰ nur etwa die Hälfte dessen ausmachen, was die Gesellschaft für die Versicherung bar verausgabt hat. Vom Standpunkte der Technik ist aber nichts dagegen einzuwenden, wenn wenigstens die unmittelbar verursachten Kosten dem ersten Deckungskapital voll entnommen werden, wenn also im Zeitpunkte des Abschlusses der Versicherung ein Betrag von vielleicht 25 bis 35 ‰ aus der ersten Jahresprämie herausgenommen wird. Dieser Auffassung hat sich die deutsche Gesetzgebung schließlich angeschlossen und den Abzug bis zu dem Satz zugelassen, den die Aufsichtsbehörde genehmigt. Der dem vollen Deckungskapital zunächst entzogene einmalige Betrag ist dann natürlich während der Prämienzahlungsdauer aus den mit den Prämien eingezahlten Tilgungsquoten allmählich wieder aufzufüllen.

Das Verfahren, in dieser Weise die Erwerbskosten oder einen Teil davon aus dem Deckungskapital zu entnehmen, ist zuerst von dem Versicherungsmathematiker Dr. Zillmer vorgeschlagen worden. Man nennt daher ein in der angegebenen Weise gekürztes Deckungskapital allgemein das „gezillmerte“ Deckungskapital. Zillmer hat auch eine Grenze für die Höhe des Satzes angegeben, um den das Deckungskapital äußersten Falles verringert werden darf; er hat gefordert, der Satz dürfe höchstens gerade noch so groß sein, daß er das erste Deckungskapital zu null werden läßt. Nach der Forderung Zillmers darf also das erste Deckungskapital keinesfalls negativ werden. Dieser an sich ganz vernünftige, aber nicht unbedingt durchführbare Grundsatz führt zu der Festsetzung des sogenannten „Zillmerschen Maximums“. Als Zillmersches Maximum wird der Unkostensatz u bezeichnet, um den die um den zugehörigen Unkostenaufschlag erhöhte Nettojahresprämie vermindert werden darf, wenn die angegebene Bedingung erfüllt sein soll.

Rechnet man in diesem Sinne retrospektiv, so erhält die Gesellschaft die Nettojahresprämie P_x und mit ihr zugleich die Tilgungsquote $\frac{u}{a_x}$, im ganzen also die „gezillmerte“ (erhöhte) Nettoprämie $\left(P_x + \frac{u}{a_x}\right)$, die man auch als Zillmersche Reserveprämie zu bezeichnen pflegt. Davon zieht die Gesellschaft ab den Unkostenbetrag u. Sie hat dann also von l_x Personen im ganzen erhalten den Betrag $\left[P_x + \frac{u}{a_x} - u\right] \cdot l_x$. Diesen Betrag zinst die Gesellschaft ein Jahr hindurch auf. Der aufgezinste Betrag muß dann, wenn das Deckungskapital am Schlusse des ersten Jahres nicht negativ werden darf, mindestens gerade noch zur Auszahlung der Sterbfallsummen d_x ausreichen. Es muß also die Beziehung gelten:

$$\left[P_x + \frac{u}{a_x} - u\right] \cdot l_x (1 + i) \geqq d_x,$$

aus der dann weiter folgt:

$$\left[P_x + \frac{u}{a_x} - u\right] \geqq v \cdot \frac{d_x}{l_x},$$

$$\left[P_x + \frac{u}{a_x} - u\right] \geqq \Pi_x .$$

Die um den Unkostensatz verringerte Reserveprämie muß also mindestens noch so groß sein wie die Risikoprämie des Eintrittsjahres. Aus dieser Bestimmung folgt dann weiter:

$$u\left(\frac{1}{a_x} - 1\right) \geqq (\Pi_x - P_x),$$

$$u\left[1 - \frac{1}{a_x}\right] \leqq [P_x - \Pi_x];$$

und daraus ergibt sich schließlich die Formel:

$$u \leqq [P_x - \Pi_x] \cdot \left(\frac{a_x}{a_x - 1}\right). \tag{128}$$

Der Barwert a_x hängt dabei ab von der Dauer der Prämienzahlung.

Rechnet man prospektiv, so darf höchstens

$$_1V_x = A_{x+1} - \left[P_x + \frac{u}{a_x}\right] \cdot a_{x+1} = 0$$

sein. Es muß also

$$A_{x+1} \geqq \left[P_x + \frac{u}{a_x}\right] \cdot a_{x+1}$$

sein. Aus dieser Bedingung folgt weiter:

$$\frac{A_{x+1}}{a_{x+1}} \geqq \left(P_x + \frac{u}{a_x}\right),$$

$$P_{x+1} \geqq \left(P_x + \frac{u}{a_x}\right),$$

$$\frac{u}{a_x} \leqq (P_{x+1} - P_x);$$

und es ergibt sich daraus schließlich die Formel:

$$(129) \qquad u \leqq (P_{x+1} - P_x) \cdot a_x .$$

Die beiden Formeln (128) und (129) müssen dieselben Werte liefern, was in der Tat auch der Fall ist. Erweitert man nämlich den Ausdruck $(P_{x+1} - P_x) \cdot a_x$ mit dem Barwert $(a_x - 1)$, so ergibt sich die Entwicklung:

$$(P_{x+1} \cdot a_x - P_{x+1} - P_x \cdot a_x + P_x)\left(\frac{a_x}{a_x - 1}\right)$$

$$= \left[P_x - (P_x \cdot a_x - P_{x+1} \cdot a_x + P_{x+1})\right]\left(\frac{a_x}{a_x - 1}\right)$$

$$= \left[P_x - \left(P_x \cdot a_x - P_{x+1}(a_x - 1)\right)\right]\frac{a_x}{a_x - 1} .$$

Es gilt aber, wie leicht einzusehen ist, die Gleichung:

$$(130) \qquad P_x \cdot a_x - P_{x+1}(a_x - 1) = \Pi_x .$$

Denn wenn der xjährige während der ganzen Prämienzahlungsdauer die Nettoprämie P_x zahlt, so kann er dafür während der ganzen Dauer versichert werden. Zahlte er aber statt dessen erst vom zweiten Jahre an die Prämie des $(x+1)$ jährigen, so könnte ihm zwar die Versicherung an sich auch gewährt werden; nur könnte dann im ersten Jahre das Todesfallwagnis nicht übernommen werden. Die Differenz zwischen dem Produkt $P_x \cdot a_x$ und dem Produkt $P_{x+1}(a_x - 1)$ muß also mit der Wagnisprämie des xjährigen übereinstimmen. Es ergibt sich somit tatsächlich die Gleichheit der Formeln (128) und (129).

Das Zillmersche Maximum ist mithin gleich dem für die Prämienzahlungsdauer berechneten Barwert des Unterschiedes zwischen der Prämie des x jährigen und der für dieselbe Versicherungsform geltenden Prämie des $(x+1)$-jährigen.

Wird allgemein mit dem Satz ζ „gezillmert", so ist also $\left(P + \frac{\zeta}{a}\right)$ die Reservеprämie, die sogenannte „gezillmerte"

Prämie. Das prospektiv ausgedrückte gezillmerte Deckungskapital hat dann die Form:

$$(131) \qquad {}_mV^{\zeta} = A_m - \left(P + \frac{\zeta}{a}\right) \cdot a_m \,.$$

Daß das gezillmerte Deckungskapital kleiner ist als das volle Deckungskapital, kommt in der Erhöhung der Nettoprämie zum Ausdruck. Denn mit der Erhöhung der Nettoprämie ist der Barwert der künftigen Leistungen des Versicherungsnehmers erhöht und damit der Unterschied gegenüber dem Barwert der künftigen Leistungen der Gesellschaft verringert. Der der Nettoprämie hinzugefügte Betrag $\frac{\zeta}{a}$ ist dabei die sogenannte „Zillmerquote", nämlich der Aufschlag, den die Gesellschaft alljährlich mit den Prämien vereinnahmt und zur Auffüllung des zunächst um den Unkostenbetrag verringerten Deckungskapitals verwendet.

Wird das Deckungskapital retrospektiv ausgedrückt, so ist nicht zu übersehen, daß der von der Gesellschaft zunächst verausgabte Betrag der Unkosten, soweit diese überhaupt berücksichtigt werden dürfen, als eine der Vergangenheit angehörende Leistung der Gesellschaft einzusetzen ist. Das retrospektiv ausgedrückte gezillmerte Deckungskapital ist somit zu berechnen nach der Formel:

$$(132) \qquad {}_mV_x^{\zeta} = \left(P_x + \frac{\zeta}{a_x}\right) r_{x,\overline{m|}} - [{}_mA_x + \zeta] \cdot {}_m\varphi_x \,.$$

Besonders verdient noch Beachtung die Formel, in der das Deckungskapital durch Rentenbarwerte ausgedrückt ist. Wird das Deckungskapital gezillmert, so gestaltet sich die Entwicklung folgendermaßen:

$${}_mV_x = A_{x+m} - \left(P_x + \frac{\zeta}{a_x}\right) \cdot a_{x+m} \,,$$

$${}_mV_x = (1 - d \cdot a_{x+m}) - \left(\frac{1}{a_x} - d + \frac{\zeta}{a_x}\right) \cdot a_{x+m} \,.$$

Es ergibt sich also schließlich die neue Formel:

$$(133) \qquad {}_mV_x^{\zeta} = 1 - (1 + \zeta) \cdot \frac{a_{x+m}}{a_x},$$

die zur Berechnung von Einzeldeckungskapitalen sehr zu empfehlen ist. Wird nicht gezillmert, wird also $\zeta = 0$, so ergibt sich die bereits angegebene Formel:

$${}_mV_x = 1 - \frac{a_{x+m}}{a_x} = \frac{a_x - a_{x+m}}{a_x}.$$

Diese beiden Formeln gelten, wie bekannt, nur für die lebenslängliche Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung und für die gemischte Versicherung, Gleichförmigkeit aller Leistungen vorausgesetzt.

Ganz allgemein aber ist bei unveränderlicher Nettoprämie $\zeta \cdot \frac{a_{x+m}}{a_x}$ der Ausdruck für den jeweiligen, rückständigen Betrag der ungedeckten Unkosten.

Das Deckungskapital erweist sich insofern für die Praxis noch als ein wertvolles Hilfsmittel, als es die Möglichkeit bietet, für jedes beliebige Versicherungsjahr ohne weiteres die wirklich zu zahlende rechnungsmäßige Wagnisprämie zu berechnen. Die wirklich gezahlte Wagnisprämie gilt nämlich nicht für die Einheit der Versicherungssumme, sondern nur für die sogenannte „Risikosumme“, das heißt für die um das bereits vorhandene Deckungskapital verminderte Versicherungssumme. Bezeichnet man die jeweilige Wagnisprämie, die im allgemeinen kleiner ist als die Wagnisprämie der Einheit, mit π_x, so kann man die Formel für diese wirklich gezahlte Wagnisprämie des einzelnen Versicherungsjahres folgendermaßen entwickeln:

Wenn m Versicherungsjahre verflossen sind, so ist vorhanden das Deckungskapital ${}_mV_x$. Dazu kommt dann am Anfang des $(m+1)$-ten Jahres wieder die Nettoprämie P_x hinzu, sodaß dann insgesamt also der Betrag $({}_mV_x + P_x)$ vorhanden ist. Als Wagnisprämie des einzelnen Versicherungsjahres hat nun der Teil der Prämie zu gelten,

der am Anfang des Jahres aus dem vorhandenen Betrag herausgenommen werden muß, damit am Schlusse des Jahres die Sterbfallsummen ausgezahlt werden können. Die wirkliche Wagnisprämie, die nach m Jahren, also zu Beginn des $(m+1)$-ten Jahres, mit der laufenden Prämie entrichtet wird, sei demgemäß π_{x+m}. Dieser Betrag ist also aus dem insgesamt vorhandenen Betrag $({}_mV_x + P_x)$ herauszunehmen. Der rechnungsmäßig aufgezinste Rest ergibt dann am Schlusse des Jahres das nächste Deckungskapital ${}_{m+1}V_x$. Es gilt also die Gleichung:

$$[{}_mV_x + P_x - \pi_{x+m}]\,(1+i) = {}_{m+1}V_x\,,$$

und daraus folgt dann die Formel:

$$(134^{\underline{a}})\qquad \pi_{x+m} = {}_mV_x + P_x - v \cdot {}_{m+1}V_x\,.$$

Werden die Deckungskapitale gezillmert, so sind dabei für V und P die entsprechenden Werte V^ζ und $P^\zeta = \left(P + \frac{\zeta}{a}\right)$ einzusetzen.*) Für den Anfang des ersten Versicherungsjahres ergibt sich der Sonderfall: $m=0$, ${}_mV_x = 0$ („ungezillmert"). Es gilt dann also die Gleichung:

$$(134^{\underline{b}})\qquad \pi_x = P_x - v \cdot {}_1V_x\,.$$

Die in den einzelnen Versicherungsjahren tatsächlich zu zahlende Wagnisprämie ist nicht nur vom Alter, sondern auch von der Form der Versicherung abhängig, im Gegensatz zu der für die Einheit der Summe geltenden „natürlichen Prämie", die sich nur nach dem Alter richtet.

Die natürliche Prämie, die gewöhnlich berechnet wird nach der Formel:

$$\Pi_x = \frac{C_x}{D_x}\,,$$

läßt sich mit Hilfe der Beziehungsgleichung (98) auch ein-

*) Als zugeordnete Sparprämie gilt der Unterschied zwischen der Nettoprämie und der Wagnisprämie, also der Betrag $(P_x - \pi_{x+m})$.

fach durch den Diskontierungsfaktor und den Vererbungsfaktor ausdrücken. Es gilt nämlich die Gleichung:

$$\Pi_x = \frac{v \cdot D_x - D_{x+1}}{D_x} = v - \frac{D_{x+1}}{D_x},$$

aus der sich dann ohne weiteres die neue Formel

$$\Pi_x = v - \frac{1}{\varphi_x} \tag{135}$$

ergibt. Diese Formel läßt sich folgendermaßen logisch begründen:

Es ist $v = \frac{1}{1+i}$ der auf den einzelnen treffende Betrag, der am Anfang des Jahres eingelegt werden muß, wenn am Schlusse des Jahres für jeden einzelnen die Summe 1 vorhanden sein soll.

Dagegen ist $\varphi_x = \frac{D_x}{D_{x+1}}$ der Betrag, der am Schlusse des Jahres an jeden einzelnen Überlebenden ausgezahlt werden kann, wenn am Anfang des Jahres jeder einzelne die Summe 1 eingezahlt hat, und wenn für die, die im Laufe des Jahres sterben, nichts ausgezahlt zu werden braucht.

Alsdann ist also $\frac{1}{\varphi_x} = \frac{D_{x+1}}{D_x}$ der Betrag, der von jedem einzelnen am Anfang des Jahres eingelegt werden muß, wenn an jeden Überlebenden am Schlusse des Jahres die Summe 1, für die Ablebenden dagegen nichts ausgezahlt werden soll.

Die Werte v und $\frac{1}{\varphi_x}$ geben also beide die auf den einzelnen treffende, am Anfang des Jahres zu leistende Einlage an, die gezahlt werden muß, wenn am Schlusse des Jahres jeder Überlebende die Summe 1 erhalten soll. Dabei gilt v jedoch unter der Voraussetzung, daß auch für die, die im Laufe des Jahres sterben, die Summe 1 gezahlt werden soll, während $\frac{1}{\varphi_x}$ unter der Voraussetzung gilt,

daß für die Ablebenden nichts ausgezahlt werden soll. Es muß also $v > \frac{1}{\varphi_x}$ sein, und es muß ferner der Unterschied zwischen v und $\frac{1}{\varphi_x}$ gerade den Betrag ausmachen, den der einzelne am Anfang des Jahres einzulegen hat, wenn für jeden, der im Laufe des Jahres gestorben ist, am Schlusse des Jahres die Summe 1 ausgezahlt werden soll. Dieser Beitrag des einzelnen aber ist die für ein Jahr geltende Wagnisprämie der Einheit, also die natürliche Prämie.

Mit Hilfe der natürlichen Prämie läßt sich für das Deckungskapital dann eine sehr zweckmäßige Formel aufstellen, die mit Erfolg angewendet werden kann, wenn für eine einzelne Versicherung alle Deckungskapitale zu berechnen sind.

Man gewinnt die neue Formel, indem man die Formel (124a) ihrer logischen Entstehung nach umdeutet.

Der Ausdruck $P_x \cdot r_{x,\overline{m}|}$ bedeutet den Endwert aller an die Gesellschaft eingezahlten Nettoprämien. Die Nettoprämien sind also an die Überlebenden zu vererben. Diese Vererbung kann man für die einzelnen Jahre durchführen, indem man zu dem bereits vorhandenen Betrag die Nettoprämie stets wieder hinzufügt und den dadurch gewonnenen Betrag mit φ_{x+k} multipliziert. Es ist also:

$$P_x \cdot r_{x,\overline{m}|} = \sum_{k=0}^{k=m-1} P_x \cdot {}_{m-k}\varphi_{x+k} .$$

Hat man die Nettoprämien voll vererbt, ohne also die erforderliche Wagnisprämie abzuziehen, so muß man anderseits zu Lasten des Versicherten die vollen Wagnisprämien der Einheit, also die natürlichen Prämien Π_{x+k} ebenfalls vererben. In der Tat ist denn auch:

$${}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x = \sum_{k-0}^{k=m-1} \Pi_{x+k} \cdot {}_{m-k}\varphi_{x+k} .$$

Man erhält also für das Deckungskapital die Formel:

$$(124^{\underline{d}})\qquad {}_mV_x = \sum_{k=0}^{k=m-1} [P_x - \Pi_{x+k}] \cdot {}_{m-k}\varphi_{x+k}\,,$$

wobei ${}_{m-k}\varphi_{x+k} = \frac{D_{x+k}}{D_{x+m}}$ zu setzen ist. Bildet man die Deckungskapitale stufenweise, so kann man einfach setzen:

$${}_1\varphi_{x+k} = \frac{D_{x+k}}{D_{x+k+1}} = \frac{(1+i)}{{}_1p_{x+k}}\,.$$

Zur Berechnung aller Deckungskapitale einer bestimmten Versicherung kann man sich auch zweckmäßig einer anderen „Rekursionsformel" bedienen, die man folgendermaßen ableitet:

Man nimmt an, es sei nach m Jahren vorhanden das Deckungskapital ${}_mV_x$ für jede der dann noch lebenden l_{x+m} Personen. Diese l_{x+m} Personen zahlen auch die neue Jahresprämie P_x, geltend für das $(m+1)$te Versicherungsjahr. Den Gesamtbetrag $l_{x+m}({}_mV_x + P_x)$ zinst die Gesellschaft auf. Am Schlusse des Jahres zahlt sie dann für d_{x+m} Sterbfälle die Sterbfallsummen, die hier einmal ganz allgemein gleich ${}_m\sigma$, also nicht gleich 1 angenommen sein mögen. Der am Schlusse des Jahres noch vorhandene Betrag $[l_{x+m}({}_mV_x + P_x)(1+i) - {}_m\sigma \cdot d_{x+m}]$ wird dann auf die überlebenden l_{x+m+1} Personen verteilt. Also ist:

$${}_{m+1}V_x = [l_{x+m}({}_mV_x + P_x)(1+i) - {}_m\sigma \cdot d_{x+m}] : l_{x+m+1}\,,$$

und daraus folgt nach einigen Umformungen:

$$(124^{\underline{e}})\quad {}_{m+1}V_x = \frac{1}{p_{x+m}}[({}_mV_x + P_x)(1+i) - {}_m\sigma \cdot q_{x+m}]\,.$$

Dabei wird meist ${}_m\sigma = 1$ sein. Die Formel erlaubt es aber auch, in einfacher Weise für Versicherungen mit veränderlicher Todesfallzahlung nacheinander alle Deckungswerte zu berechnen. So leistet sie beispielsweise gute Dienste in der Versicherung mit festem Auszahlungstermin, wo ganz allgemein ${}_m\sigma = v^{n-m-1}$ zu sein pflegt.

15. Kapitel.

Die Kündigungswerte.

Ist für eine Versicherung, bei der mit Notwendigkeit einmal der Versicherungsfall eintreten muß, eine einmalige Prämie gezahlt, oder sind laufende Prämien wenigstens für drei Jahre entrichtet, so kann der Versicherungsnehmer, wenn er die Versicherung nicht fortsetzen will, von der Gesellschaft den sogenannten Rückkaufspreis fordern. Er kann statt dessen auch verlangen, daß die Versicherung mit entsprechend herabgesetzter Summe als prämienfreie Versicherung weitergeführt wird. Der Rückkaufspreis wird gewöhnlich nach dem für die Versicherung vorhandenen Deckungskapital bemessen. Es wird ein bestimmter Teil dieses Deckungskapitals erstattet, der um so größer ist, je höher das Deckungskapital selbst ausfällt, wenn man es zur Versicherungssumme ins Verhältnis setzt. So kann beispielsweise die Bestimmung getroffen werden, daß zunächst ein Betrag von 75 % des Deckungskapitals zu erstatten sei, solange dieses den Betrag von 500 Mark für 1000 Mark Versicherungssumme nicht übersteigt, daß dann aber für jeden weiteren Betrag von 10 Mark, um den das Deckungskapital für 1000 Mark Versicherungssumme höher ausfällt, der Abfindungssatz um je ½ % höher sein solle, sodaß er schließlich von selbst den vollen Betrag von 100 % erreicht, wenn das Deckungskapital den Wert 1000 annimmt. In ähnlicher Weise waren früher die meisten Rückkaufssysteme der deutschen Lebensversicherungsgesellschaften tatsächlich eingerichtet. Das Verfahren läßt sich von einer gewissen Willkür nicht freisprechen. Es hat denn auch nicht an Versuchen gefehlt, hier eine Änderung herbeizuführen. Daß das Deckungskapital nicht voll erstattet werden kann, gilt als selbstverständlich. Denn wenn jemand seine Versicherung auflösen will, so ist er im allgemeinen als gutes Wagnis anzusehen. Man pflegt anzunehmen, daß er andernfalls bestrebt sein würde, die

für ihn besonders wertvolle Versicherung aufrecht zu erhalten. Wer also seine Versicherung vorzeitig auflöst, der könnte damit das Wagnis der Gesamtheit verschlechtern, und dafür ist er der Gesamtheit eine Entschädigung schuldig. Eine Entschädigung kann außerdem billigerweise auch dafür gefordert werden, daß der ausscheidende Versicherungsnehmer die von der Gesellschaft verausgabten einmaligen Unkosten meist noch nicht vollständig ersetzt hat. Der von der Gesellschaft einzuziehende, also am Deckungskapital abzuziehende Entschädigungsbetrag soll indes nicht zu hoch bemessen sein; er darf nicht wie eine Strafe wirken. Anderseits soll aber dem Versicherungsnehmer die Auflösung der Versicherung auch nicht zu leicht gemacht werden. Es ist daher auf alle Fälle nicht gut, wenn ein Rückkaufssystem so eingerichtet ist, daß das volle Deckungskapital schon erstattet werden muß, bevor die Versicherungssumme von selbst fällig wird. Solche Rückkaufssysteme hat es in der Praxis aber gegeben. So konnte man beispielsweise die Bestimmung finden, daß der Abfindungssatz zunächst 70 % des Deckungskapitals ausmachen sollte, solange dieses den Betrag von 500 Mark für 1000 Mark Versicherungssumme nicht überstieg, und daß sich dann für jeden weiteren Betrag von 10 Mark, um den das Deckungskapital für 1000 Mark Versicherungssumme höher ausfiel, der Abfindungssatz um 1 % erhöhen sollte, sodaß er den vollen Betrag von 100 % schon erreichte, wenn das Dekkungskapital erst 800 Mark für 1000 Mark Versicherungssumme ausmachte. Man kann eine derartige Form der Steigerung nicht als gut bezeichnen.

Hie und da werden in der Praxis auch andere Rückkaufssysteme angewendet, die im großen und ganzen aber zu ähnlichen Werten führen, wie sie sich nach den hier dargelegten Systemen ergeben.

Werden die Unkosten mit Hilfe des Zillmerschen Verfahrens am Deckungskapital voll abgezogen, so braucht der weitere Abzug nicht mehr erheblich zu sein. Das in letzter Zeit gebräuchlich gewordene Verfahren, den Abzugssatz in

diesem Falle gleichmäßig zu gestalten, ist zwar sehr bequem, entspricht aber nicht dem, was versicherungstechnisch recht und billig erscheint. Soll auf eine Abstufung des Satzes durchaus verzichtet werden, so ist es dann schon besser, am Deckungskapital einfach einen bestimmten Teilsatz der Versicherungssumme abzuziehen, wie das denn ja auch tatsächlich vereinzelt gebräuchlich gewesen ist. Ein Rückkaufswert von der Form $({}_mV_x - \vartheta)$ ist einem Rückkaufswert von der Form $(1-\eta)\cdot{}_mV_x$ schon deshalb vorzuziehen, weil er dem Sinne des Abzuges, der Schadloshaltung für den entgehenden erwarteten Gewinn, besser entspricht.

Wird eine Versicherung nicht aufgelöst, sondern wird nur die Prämienzahlung eingestellt, die Versicherung also mit verminderter Summe weitergeführt, so wird bisweilen das Deckungskapital als einmalige Bruttoeinlage, bisweilen auch der Rückkaufswert als einmalige Nettoeinlage des inzwischen erreichten Alters angesehen. Das zweite Verfahren verdient wohl den Vorzug. Die herabgesetzte Versicherungssumme der prämienfreien Versicherung berechnet sich dann nach der Formel:

$$(136)\qquad {}_mW_x = \frac{{}_m\eta_x \cdot {}_mV_x}{A_{x+m}},$$

wobei mit W der Betrag der prämienfreien Summe, mit η der für die Berechnung geltende Abfindungssatz bezeichnet ist.

In der gemischten Versicherung (sowie auch in der Sparversicherung) ist es bisweilen gebräuchlich gewesen, die prämienfreie Versicherungssumme nach dem Verhältnis der Anzahl der tatsächlich entrichteten zur Anzahl der ursprünglich bedungenen Jahresprämien zu bestimmen. Die herabgesetzte Summe der prämienfreien Versicherung berechnet sich dann nach der Formel:

$$(137)\qquad {}_m\mathcal{W}_{x,\overline{n}|} = \frac{m}{n}\cdot\mathcal{S},$$

wobei mit $\mathcal{S}$ die ursprünglich vereinbarte Versicherungs-

summe bezeichnet ist. Das Verfahren gibt leidlich gute Werte, sollte aber eigentlich nur in der Sparversicherung angewendet werden; in der Technik der regelrechten Lebensversicherung ist es nicht mehr recht am Platze.

Wird das Deckungskapital als einmalige Bruttoeinlage verwendet, so ist es am zweckmäßigsten, diese Bruttoprämie nach der Formel

$$\mathfrak{A} = A + \beta \cdot a \tag{138}$$

zu bestimmen. Dabei würde für β ein Wert von 0,001 im allgemeinen wohl ausreichen, wenn es nicht anderseits unrecht wäre, das volle Deckungskapital anzurechnen. Denn die Gründe, die einen Abzug am Deckungskapital gerechtfertigt erscheinen lassen, wenn eine Versicherung aufgelöst wird, haben doch mehr oder minder auch Geltung, wenn eine Versicherung in eine prämienfreie umgewandelt wird. Man wird unter diesen Umständen für die Formel (138) einen höheren Aufschlag festsetzen können, umsomehr als man doch auch zu berücksichtigen hat, daß oft noch ungedeckte Erwerbskosten zu tilgen sind. Keinesfalls aber sollte man den Aufschlag im Verhältnis des Barwertes A bemessen; denn das erforderte wieder eine Abstufung des Aufschlages, die, wenn sie nicht unbedingt geboten ist, besser vermieden wird und auch leicht vermieden werden kann. Ein wirklich angemessener Wert für β läßt sich kaum angeben; praktisch brauchbar wäre vielleicht ein Wert von 0,002 bis 0,003.

Bisweilen wird eine Versicherung aus einer Form in eine andere übergeführt. Wenn dabei die Versicherungssumme mindestens dieselbe bleibt wie vorher, so kann fast stets das volle für die Versicherung vorhandene Deckungskapital angerechnet werden.

Versicherungen, bei denen der Versicherungsfall nicht mit Notwendigkeit einzutreten braucht, können keinen Rückkaufswert aufweisen, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil der Versicherungsnehmer sonst, sobald die Gefahr be-

stünde, daß die für die Versicherung geleisteten Einlagen verloren gehen könnten, unverzüglich die Versicherung auflösen und sich den Rückkaufspreis auszahlen lassen würde. Zu derartigen Versicherungen gehören zunächst die verschiedenen Formen der Leibrentenversicherung, sodann aber vor allem die reine Versicherung auf den Lebensfall und im allgemeinen auch die kurze Versicherung auf den Todesfall (die Risikoversicherung). Am besten läßt sich die reine Erlebensfallversicherung als Beispiel anführen. Diese Form der Versicherung bringt doch nur deshalb für die Überlebenden eine verhältnismäßig hohe Verzinsung mit sich, weil ein Teil der Versicherten stirbt, bevor die Gegenleistung fällig wird, und weil dieser Teil der Versicherten das vorhandene Deckungskapital auf diese Weise an die Gesamtheit vererbt. Wiese eine solche Versicherung regelrechte Rückkaufswerte auf, so würde sie zurückgekauft, sobald zu befürchten wäre, daß der Versicherte vorzeitig sterben könnte. Die technisch unbedingt erforderlichen Vererbungsbeträge fielen dann also der Gesamtheit nicht anheim. Die Vererbungsbeträge würden vielmehr gegen alle Wahrscheinlichkeit so stark herabgedrückt, daß von einer Vererbung in Wirklichkeit kaum noch die Rede sein könnte.

Dagegen, daß Versicherungen dieser Art in prämienfreie Versicherungen mit entsprechend herabgesetzter Gegenleistung umgewandelt werden, ist technisch selbstverständlich nichts einzuwenden.

Wenn Versicherungen auf den Lebensfall in Verbindung mit anderen Versicherungen vorkommen, dann können den Lebensfallversicherungen bisweilen auch Rückkaufswerte zugesprochen werden. Man muß dann danach die Entscheidung treffen, was mit der Versicherung bezweckt worden ist, und wie die vorzeitige Auflösung einwirken könnte. Keinesfalls aber dürfen die Kündigungswerte für derartige verbundene Versicherungen ungewöhnlich hoch ausfallen, weil sonst der Anreiz zur Auflösung der Versicherung so

stark wirken könnte, daß die Zusammensetzung des Bestandes der betreffenden Gruppe dadurch nachteilig beeinflußt wird. Es muß dem Versicherungsverständigen überlassen bleiben, hierüber von Fall zu Fall zu entscheiden und dabei stets zu berücksichtigen, daß bestimmte Grenzwerte nicht überschritten werden dürfen. Ist zum Beispiel eine lebenslängliche Todesfallversicherung mit abgekürzter Prämienzahlungsdauer in der Weise abgeschlossen, daß eine Erlebensfallsumme (eine Bonifikation) mitversichert ist, die im Zeitpunkte des Ablaufs der Prämienzahlungsdauer fällig werden soll, und ist diese Bonifikation ebenso hoch bemessen wie die Todesfallsumme, so liegt der Form nach eine Verbindung der lebenslänglichen Todesfallversicherung mit der reinen Erlebensfallversicherung vor. Der Barwert der Versicherung ist denn auch tatsächlich zunächst durch die Summe $(A_x + {}_nE_x)$ ausgedrückt. Wollte man aber für die Bemessung des Rückkaufswertes einer solchen Versicherung das volle Deckungskapital, also die Deckungskapitale beider Versicherungen zugrunde legen, so wäre das technisch nicht zu rechtfertigen, da die verbundene Versicherung in ihrer Wirkung doch nichts anderes ist als eine gemischte Versicherung, zu der noch eine Todesfallversicherung mit Wartefrist hinzugekommen ist. Man kann den Barwert der Versicherung demgemäß auch zerlegen; man kann ihm nämlich die Form geben:

$$(139)\qquad (A_x + {}_nE_x) = {}_nA_x + {}_nE_x + {}_{n|}A_x = A_{x,\overline{n}|} + {}_{n|}A_x .$$

Man hat dann für die in der verbundenen Versicherung enthaltene gemischte Versicherung deren regelrechte Kündigungswerte festzusetzen; die hinzugekommene Todesfallversicherung mit Wartefrist aber ist nicht rückkaufsfähig, weil bei dieser Form der Versicherung der Versicherungsfall nicht mit Notwendigkeit einzutreten braucht. Eine solche Prüfung der Sachlage ist stets am Platze, wenn für eine besondere Form der Versicherung, im besonderen also, wenn für verbundene Versicherungen die Kündigungswerte berechnet werden sollen.

16. Kapitel.

Die Versicherung mit Prämienrückgewähr.

Es gibt verschiedene Arten der Versicherung, für die die einmaligen Einlagen oder die laufenden Prämien mit unbedingter Verlustgefahr eingezahlt werden. Für die Praxis kommt da hauptsächlich in Betracht die kurze Versicherung auf den Todesfall und die Versicherung einer aufgeschobenen Rente. Namentlich die Versicherung einer aufgeschobenen Rente wird trotz ihrer unleugbaren wirtschaftlichen Vorteile wohl hauptsächlich deshalb so wenig beachtet, weil der Versicherungsnehmer im allgemeinen nicht gewillt ist, die Gefahr auf sich zu nehmen, daß seine Einlagen ohne Gegenleistung verloren gehen könnten. Man ist da nun auf den Ausweg verfallen, derartige Versicherungen in der Weise abzuschließen, daß entweder der volle Betrag der geleisteten Einlagen oder doch wenigstens ein bestimmter Teil davon zu erstatten ist, wenn der Versicherte sterben sollte, bevor die Wartefrist abgelaufen ist. Man spricht dann von der Versicherung „mit Prämienrückgewähr“. Durch die Mitversicherung der Rückgewähr wird der wirtschaftliche Vorteil solcher Versicherungen selbstverständlich zum Teil wieder aufgehoben. Der Versicherungsnehmer empfindet das aber meist weniger unangenehm als die Gefahr des völligen Verlustes seiner Einlagen.

Technisch bietet die Versicherung mit Prämienrückgewähr nichts Neues. Es kommt einfach zu der Hauptversicherung noch eine Zusatzversicherung hinzu, die meist eine kurze Versicherung auf den Todesfall, bisweilen eine reine Versicherung auf den Lebensfall ist, und die sich nicht auf die Einheit der Summe bezieht, sondern für die die einmalige Einlage oder die Jahresprämie als Einheit gilt, deren Rückgewähr mitversichert werden soll. Es sei dabei ausdrücklich bemerkt, daß sich in der Praxis die Rückgewähr fast stets auf den Betrag der vollen Einlage oder Prämie

erstreckt, daß also nicht nur die Prämie der Grundversicherung, sondern auch die Prämie der Zusatzversicherung „rückgewährberechtigt“ ist. Es hätte wenig Sinn, nur die Prämie der Grundversicherung als rückgewährberechtigt zu erklären; denn statt dessen könnte man einfach festsetzen, daß der insgesamt entrichtete Betrag nicht ganz, sondern nur zu einem bestimmten Teil zurückzugeben sein soll, wenn der Versicherte beispielsweise während der bedungenen Rückgewährdauer sterben sollte.

Wird die Versicherung zur einmaligen Einlage abgeschlossen, so gilt zunächst die allgemeine Gleichung:

(140a) $$A^r = A + ZA\,,$$ (reine Nettoeinlage)

wobei mit A^r die „rückgewährberechtigte“ Nettoeinlage, mit ZA die Zusatznettoeinlage bezeichnet ist. Ebenso gilt dann auch für die Bruttoeinlage die entsprechende Formel:

(140b) $$\mathfrak{A}^r = \mathfrak{A} + \mathfrak{Z}\mathfrak{A}\,.$$

Soll nun die gesamte Bruttoeinlage $\mathfrak{A}^r$ zurückgegeben werden, wenn der Versicherte während der Rückgewährdauer von n Jahren sterben sollte, so gelten für die Zusatzeinlage die Formeln:

(141a) $$Z\mathfrak{A} = {}_nA_x \cdot \mathfrak{A}^r$$ und

(141b) $$\mathfrak{Z}\mathfrak{A} = (1 + \beta) \cdot {}_nA_x \cdot \mathfrak{A}^r\,.$$

Mit β ist dabei der für die Zusatzversicherung zu erhebende besondere Aufschlag bezeichnet. Man wird gut tun, diesen Aufschlag abzustufen, ihn nämlich um so höher anzusetzen, je länger die Rückgewährdauer ist. Denn in der Mitversicherung der Rückgewähr kommt eine starke Selbstauslese des Versicherungsnehmers zum Ausdruck. Der Versicherungsnehmer will zum Beispiel eine irgendwie geartete Versicherung auf den Lebensfall abschließen, hat aber mehr oder weniger bewußt das Empfinden, daß er zu denen gehören könnte, die dann durch vorzeitiges Ableben zur Vererbung beitragen. Dem will er aus dem Wege gehen, und deshalb schließt er die Zusatzversicherung ein. Unter diesen Umständen dürfte es sich empfehlen,

neben einem gleichbleibenden Aufschlag β_0 noch einen von der Rückgewährdauer abhängigen zweiten Aufschlag β_1 festzusetzen. Für die Bruttozusatzprämie ergibt sich dann die erweiterte Formel:

$$(141\underline{c})\qquad \mathfrak{Z}\mathfrak{A} = [1 + \beta_0 + n \cdot \beta_1] \cdot {}_nA_x \cdot \mathfrak{A}^r;$$

und daraus folgt die endgültige Formel:

$$(142)\qquad \mathfrak{A}^r = \frac{\mathfrak{A}}{1 - [(1 + \beta_0 + n \cdot \beta_1) \cdot {}_nA_x]}.$$

Für die Aufschläge können dabei die Werte

$$\beta_0 = 0{,}050\,,$$
$$\beta_1 = 0{,}005$$

als angemessen und ausreichend angesehen werden.

Ist die Versicherung mit laufender Prämienzahlung abgeschlossen, so ergeben sich nach denselben Grundsätzen zunächst die Gleichungen:

$$(143\underline{a})\qquad P^r = P + ZP, \qquad \text{(reine Nettoprämie)}$$

und

$$(143\underline{b})\qquad \mathfrak{P}^r = \mathfrak{P} + \mathfrak{Z}\mathfrak{P}.$$

Die Zusatzversicherung ist dabei meist eine kurze Versicherung auf den Todesfall mit steigender Versicherungssumme. Im ersten Versicherungsjahr steht dann der einfache Betrag der Prämie, im zweiten Jahre der doppelte Betrag der Prämie unter Wagnis usw. Es gilt also für den Barwert der Zusatzversicherung die Gleichung (95), mit der Änderung jedoch, daß im Erlebensfall nach n Jahren keine Auszahlung zu leisten ist, daß also im Zähler der Summand $n \cdot D_{x+n}$ wegfällt. Für die Nettozusatzprämie gilt also die Gleichung:

$$(144\underline{a})\qquad Z\mathfrak{P} = \frac{R_x - R_{x+n} - n \cdot M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}} \cdot \mathfrak{P}^r$$

oder auch in einfacherer Schreibung die Gleichung:

$$(144\underline{b})\qquad Z\mathfrak{P} = \frac{{}_nA_x^{<1}}{a_{x,\overline{n}|}} \cdot \mathfrak{P}^r = {}^{<1}_{\ n}P_x \cdot \mathfrak{P}^r,$$

woraus dann herzuleiten ist die Formel:

$$(145) \qquad \mathfrak{P}^r = \frac{\mathfrak{P}}{1 - \left[(1 + \beta_0 + n \cdot \beta_1) \, {}^{<1}_{\;n}P_x\right]} \,.$$

Mit Rücksicht darauf, daß eine zur laufenden Prämie abgeschlossene Versicherung allein schon wegen der Inkassoprovision mehr Unkosten verursacht als eine Versicherung mit einmaliger Prämie, wäre in dieser Formel für β_0 ein höherer Wert am Platze. Man könnte vielleicht setzen:

$$\beta_0 = 0{,}100\,,$$
$$\beta_1 = 0{,}005\,.$$

Der Ausdruck ${}^{<1}_{\;n}P_x$, der symbolisch andeutet, daß sich nicht die Leistung des Versicherungsnehmers, sondern die für den Fall des Ablebens übernommene Gegenleistung der Gesellschaft von Jahr zu Jahr erhöht, läßt sich mit Hilfe der Beziehungsgleichungen (100) und (119) auch auf die Form bringen:

$$(146) \qquad {}^{<1}_{\;n}P_x = 1 - d \cdot \frac{\overset{<1}{a}_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|}} - \frac{n}{r_{x,\overline{n}|}}\,,$$

womit man dann wieder eine Formel gefunden hätte, in der ausschließlich Rentenwerte vorkommen. Für das praktische Rechnen wird man sich jedoch meist der Formel (144$\underline{\text{a}}$) bedienen.

Eine besondere Form der Rückgewähr verdient noch hervorgehoben zu werden. Es kommt bei der zur einmaligen Einlage abgeschlossenen Rentenversicherung mit Wartefrist bisweilen vor, daß die Mitversicherung der Rückgewähr über den Beginn des Rentenlaufs hinaus ausgedehnt wird, und zwar derart, daß der beim Ableben des Versicherten zu erstattende Betrag um so geringer wird, je mehr Renten bereits ausgezahlt worden sind, bis der zu erstattende Betrag schließlich nach einer bestimmten Anzahl von Jahren von selbst zu null wird. Wird die Rückgewähr um t Jahre über die Dauer der Wartefrist hinaus aus-

gedehnt, so ist während der Wartefrist im Todesfalle der volle Betrag der Einlage zurückzuzahlen. Ist dann die erste Rente ausgezahlt worden, so wird beim Ableben des Versicherten nur noch der Teil $\frac{t-1}{t}$ zurückgezahlt. Im darauf folgenden Jahre wird nur noch der Teil $\frac{t-2}{t}$ erstattet usw. Setzt man $\frac{1}{t}=\varepsilon$, so gilt für die Einheit der Einlage während der Aufschubsfrist als Rückgewährbetrag die Summe 1; im ersten Jahre darnach gilt nur noch der Rückgewährbetrag $(1-\varepsilon)$, im darauf folgenden Jahre der Betrag $(1-2\varepsilon)$ usw. Im t-ten Jahre nach dem Ablauf der Aufschubsfrist verschwindet der Rückgewährbetrag von selbst, da er dann den Wert $(1-t\cdot\varepsilon)=0$ annehmen muß. Es leuchtet ein, daß danach die Gleichung

$$Z\mathfrak{A}=\frac{[M_x-M_{x+n+t}]-\varepsilon\cdot[R_{x+n}-R_{x+n+t}-t\cdot M_{x+n+t}]}{D_x}\cdot\mathfrak{A}^r$$

Geltung haben muß. Dafür kann man dann auch schreiben:

$$Z\mathfrak{A}=\left[{}_{n+t}A_x-\varepsilon\cdot{}_{n|t}A_x^{<1}\right]\cdot\mathfrak{A}^r;$$

und so erhält man schließlich die Formel:

$$(147)\qquad \mathfrak{A}^r=\frac{\mathfrak{A}}{1-[1+\beta_0+n\cdot\beta_1]\cdot\left[{}_{n+t}A_x-\frac{1}{t}\,{}_{n|t}A_x^{<1}\right]},$$

wobei man für den in der Klammer stehenden Wert einfach

$$\frac{M_x-\varepsilon\cdot(R_{x+n}-R_{x+n+t})}{D_x}$$

setzen kann.

Bei der mit sofortigem Beginn des Rentenlaufs abgeschlossenen Leibrente wird in ähnlicher Weise bisweilen gefordert, daß die Rückgewähr der noch nicht bar ausgezahlten Renten mitversichert werden soll. Stirbt der Versicherte

also im ersten Jahre, so soll die Einlage unverkürzt zurückgegeben werden. Stirbt er im zweiten Jahre, so ist inzwischen die Rente 1 bereits ausgezahlt worden. Es kann dann also nur noch der Betrag $(\mathfrak{A}^r - 1)$ erstattet werden. Im dritten Jahre steht noch der Betrag $(\mathfrak{A}^r - 2)$ unter Rückgewähr usw. Schließlich wird dann im $(k+1)$-ten Jahre nur noch der Betrag $(\mathfrak{A}^r - k)$ erstattet, wenn der Versicherte gerade in diesem Jahre sterben sollte. Dabei ist unter k die nächste unter dem Wert $\mathfrak{A}^r$ liegende ganze Zahl und unter $\mathfrak{A}^r$ die „rückgewährberechtigte" Bruttoeinlage zu verstehen. Für die Praxis empfiehlt es sich jedoch, im ersten Jahre beim Ableben nicht die volle Einlage $\mathfrak{A}^r$, sondern nur den Betrag $(\mathfrak{A}^r - 1)$, im zweiten Jahre also nur den Betrag $(\mathfrak{A}^r - 2)$, im dritten Jahre den Betrag $(\mathfrak{A}^r - 3)$ zu erstatten usw. Dann wird also im k-ten Jahre der Betrag $(\mathfrak{A}^r - k)$ erstattet und vom $(k+1)$-ten Jahre an nichts mehr zurückgegeben. Diese Form hat neben der bequemeren Gestaltung der Formel noch den technischen Vorzug, daß die Gesellschaft die einmalige Einlage, aus der sie doch schon zur Deckung von Verwaltungskosten etwas hat herausnehmen müssen, niemals voll zurückzugeben braucht. Als einmalige Nettozusatzprämie ergibt sich für diese Form dann die Gleichung:

$$Z\mathfrak{A} = {}_kA_x \cdot \mathfrak{A}^r - {}_kA_x^{<1}.$$

Man erhält also schließlich die Formel:

$$(148) \qquad \mathfrak{A}^r = \frac{\mathfrak{A} - [1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1] \cdot {}_kA_x^{<1}}{1 - [1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1] \cdot {}_kA_x}.$$

Da $\mathfrak{A}^r$ zunächst noch unbekannt ist, kann der Wert k nur abgeschätzt werden, was jedoch bei einiger Übung keine Schwierigkeit bietet. Die Rechnung ergibt dann von selbst, ob k zutreffend gewählt worden ist oder nicht. Gegebenenfalls ist der Wert dann also zu ändern und die Rechnung nochmals durchzusehen. (Näheres darüber enthält die Aufgabensammlung).

Wirtschaftlich vorteilhaft sind derartige Versicherungen selbstverständlich nicht. Es wäre daher unter allen Umständen am besten, wenn solche Zusatzversicherungen überhaupt nicht abgeschlossen würden. Bei dem meist sehr stark hervortretenden Bestreben der Antragsteller, sich in jeder denkbaren Weise dagegen zu schützen, daß die geleisteten Einlagen voll verloren gehen könnten, sind sie jedoch nicht ganz zu vermeiden. Wirtschaftlich weniger nachteilig läßt sich eine solche Zusatzversicherung gestalten, wenn die Bestimmung getroffen wird, daß nur für einen bestimmten Teil der Leistung des Versicherungsnehmers die Rückgewähr mitversichert wird. Bezeichnet man diesen Teil mit ϑ, so ergeben sich für die gebräuchlichste Form der Rückgewähr die beiden Formeln:

$$(149^{\underline{a}})\qquad \mathfrak{A}^{r} = \frac{\mathfrak{A}}{1 - \vartheta\,[1 + \beta_0 + n \cdot \beta_1] \cdot {}_{n}A_{x}} \qquad \text{und}$$

$$(149^{\underline{b}})\qquad \mathfrak{P}^{r} = \frac{\mathfrak{P}}{1 - \vartheta\,[1 + \beta_0 + n \cdot \beta_1] \cdot {}^{<1}_{\ n}P_{x}}\,.$$

Hie und da wird, ohne daß sich dafür ein wirklich stichhaltiger wirtschaftlicher Grund anführen ließe, auch bei anderen Formen der Versicherung die Rückgewähr der Prämien mitversichert. Das geschieht vor allem in der Unfallversicherung. Das Bestreben des Versicherungsnehmers, unter bestimmten Voraussetzungen scheinbar umsonst versichert zu sein, hat sogar dahin geführt, daß bisweilen auch in der gewöhnlichen Todesfallversicherung die Prämienrückgewähr mitversichert wird, was wirtschaftlich natürlich am allerwenigsten zu rechtfertigen ist, weil im Todesfalle ohnehin schon eine angemessene Gegenleistung fällig wird. Kommen derartige Fälle in der Praxis vor, so sind die hier gegebenen Formeln entsprechend anzuwenden und nötigenfalls zu erweitern. Zur Erläuterung sei hier die Unfallversicherung mit Prämienrückgewähr angeführt. Die Versicherung wird auf eine bestimmte Dauer abgeschlossen,

und es wird vereinbart, daß die eingezahlten Prämien zurückgegeben werden sollen, wenn der Versicherte während der festgesetzten Dauer von n Jahren sterben sollte, daß aber endgültig alle n Prämien erstattet werden sollen, wenn der Versicherte nach n Jahren noch am Leben ist. Für die Zusatzversicherung ist also entweder die Formel (95) oder die Formel (107) anzuwenden, die mit ihr gleichbedeutend ist. Wird mit $\mathfrak{U}$ die Bruttoprämie der Unfallversicherung bezeichnet, die nur das Unfallwagnis deckt, mit $\mathfrak{R}$ dagegen die „rückgewährberechtigte" gesamte Jahresprämie, so gilt zunächst die Gleichung:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{U} + (1+\gamma) \cdot \frac{\overset{<1}{A}_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|}} \cdot \mathfrak{R}\,.$$

Setzt man dann:

$$\frac{\overset{<1}{A}_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|}} = {}^{<1}P_{x,\overline{n}|}\,,$$

so erhält man ohne weiteres die Formel:

$$(150^{\underline{a}}) \qquad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{U}}{1-(1+\gamma)\cdot {}^{<1}P_{x,\overline{n}|}}\,.$$

Dabei wird man der Nettojahresprämie, die wieder, wie hier nebenbei bemerkt sein mag, für eine Versicherung mit steigender Leistung der Gesellschaft Geltung hat, am besten mit Hilfe der Formel (107) die bequeme Fassung geben:

$${}^{<1}P_{x,\overline{n}|} = 1 - d \cdot \frac{\overset{<}{a}_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|}}\,, \qquad \text{wobei}$$

$$\overset{<}{a}_{x,\overline{n}|} = \frac{S_x - S_{x+n} - n \cdot N_{x+n}}{D_x}$$

zu setzen ist. Den Zuschlag γ muß man für diese Form der Versicherung besonders bestimmen; man hat ihn natürlich den für die Zusatzversicherung aufzuwendenden Ver-

waltungskosten anzupassen. Sind diese von der Gesamtprämie abhängig gemacht, so findet man:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{U} + \gamma \cdot \mathfrak{R} + {}^{<1}P_{x,\overline{n|}} \cdot \mathfrak{R} \qquad \text{und somit:}$$

$$(150\underline{^{b}})\qquad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{U}}{1 - \gamma - {}^{<1}P_{x,\overline{n|}}} = \frac{\mathfrak{U}}{d \cdot \dfrac{\overset{<}{a}_{x,\overline{n|}}}{a_{x,\overline{n|}}} - \gamma}.$$

Setzt man $\dfrac{\overset{<}{a}_{x,\overline{n|}}}{a_{x,\overline{n|}}} = {}_nQ_x$ und berücksichtigt man, daß man den Unkostenzuschlag zerlegen muß in einen Aufschlag für einmalige und einen Aufschlag für laufende Unkosten, so erhält man:

$$(150\underline{^{c}})\qquad \mathfrak{R} = \frac{\mathfrak{U}}{d \cdot {}_nQ_x - \dfrac{\alpha}{a_{x,\overline{n|}}} - \beta}.$$

Dabei wird man die Unfallprämie $\mathfrak{U}$ etwas niedriger ansetzen können als sie sonst üblich ist. Denn wer die Unfallversicherung mit Rückgewähr abschließt, sucht sich weniger stark im Sinne des Unfallwagnisses aus als der, der die reine Unfallversicherung wählt. Ist $\mathfrak{U}^0$ die Prämie der reinen Unfallversicherung, so setzt man $\mathfrak{U} = \vartheta \cdot \mathfrak{U}^0$, wobei $\vartheta = \dfrac{2}{3}$ als angemessen angesehen werden kann. Man hat dann:

$$(150\underline{^{d}})\qquad \mathfrak{R} = \frac{\vartheta}{d \cdot {}_nQ_x - \dfrac{\alpha}{a_{x,\overline{n|}}} - \beta} \cdot \mathfrak{U}^0 = {}_n\mathfrak{F}_x \cdot \mathfrak{U}^0,$$

wobei ${}_n\mathfrak{F}_x$ als „Rückgewährfaktor" bezeichnet zu werden pflegt. Mit diesem Faktor ist die einfache Unfallprämie zu multiplizieren, wenn die Versicherung mit Rückgewähr abgeschlossen werden soll. Dabei kann für α der Wert 0,30, für β der Wert 0,15 als angemessen angesehen werden.

17. Kapitel.

Die unterjährige Zahlung von Renten und Prämien.

Die regelrechte Form der Einzahlung von Prämien und der Auszahlung von Renten ist die ganzjährige Zahlung. Da die Lebens- und die Sterbenswahrscheinlichkeiten für ein ganzes Jahr abgestuft sind, so gelten sämtliche Werte der Versicherungsrechnung für ganzjährige Intervalle. Man könnte die Werte auch für unterjährige Intervalle berechnen, zum Beispiel für Halbjahre oder für Vierteljahre. Es ist in der Tat hie und da auch der Versuch gemacht worden, Prämien und Renten in dieser Weise zu berechnen. Es bieten sich dabei durchaus keine besonderen Schwierigkeiten. Man erhält statt der für ein ganzes Jahr geltenden Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten entsprechende Wahrscheinlichkeiten für Halbjahre oder Vierteljahre und kann dann darauf die Grundwerte l, d, D, C, N, M, S und R gerade so gut aufbauen wie auf den für ein ganzes Jahr abgestuften Wahrscheinlichkeiten. Der praktische Wert einer so weitgehenden Abstufung ist aber sehr gering; zu der vermehrten Arbeit steht er jedenfalls in keinem rechten Verhältnis. Man hat sich denn auch fast allgemein daran gewöhnt, für die allerdings recht häufig vorkommende unterjährige Prämien- oder Rentenzahlung andere Grundsätze gelten zu lassen, die sich zudem auch mit den Anforderungen der Praxis leichter in Einklang bringen lassen.

Den Wert der unterjährig zu zahlenden Rente findet man mit einer praktisch völlig ausreichenden Genauigkeit durch ein einfaches Interpolationsverfahren. Hat man für die nachschüssige Rente der Einheit den Barwert a_x, so kann man den Barwert dieser Rente, die doch zum ersten Male nach einem Jahre auszuzahlen ist, leicht in den Barwert einer Rente verwandeln, die schon ein ganzes Jahr

früher fällig wird: man hat einfach den Wert a_x um die Einheit zu erhöhen. Interpoliert man linear, so kann man daraus dann weiter folgern, daß $\left(a_x + \frac{1}{2}\right)$ der Barwert einer zunächst noch ganzjährig zu zahlenden Rente sein müsse, die zum ersten Male nach einem halben Jahre, dann aber wieder in Abständen von je einem ganzen Jahre auszuzahlen ist. Teilt man nun das Jahr in m gleiche Teile, so ist:

a_x der Barwert einer Rente, die zum ersten Male fällig wird nach 1 Jahre,

$\left(a_x + \frac{1}{m}\right)$ der Barwert einer Rente, die zum ersten Male fällig wird nach $\frac{m-1}{m}$ Jahren,

$\left(a_x + \frac{2}{m}\right)$ der Barwert einer Rente, die zum ersten Male fällig wird nach $\frac{m-2}{m}$ Jahren,

u. s. w.

$\left(a_x + \frac{m-2}{m}\right)$ der Barwert einer Rente, die zum ersten Male fällig wird nach $\frac{2}{m}$ Jahren,

$\left(a_x + \frac{m-1}{m}\right)$ der Barwert einer Rente, die zum ersten Male fällig wird nach $\frac{1}{m}$ Jahr,

$\left(a_x + \frac{m}{m}\right)$ der Barwert einer Rente, die zum ersten Male fällig wird nach $\frac{0}{m}$ Jahren, die also sofort fällig wird.

Alle diese einzelnen Renten werden, nachdem sie zum ersten Male fällig geworden sind, weiterhin stets wieder fällig in Abständen von je einem Jahre. Soll nun eine unterjährige Rente nachschüssig gezahlt werden, so ist das letzte Glied der Reihe, das den Wert $(a_x + 1)$ ergibt, wegzulassen, da dieser Wert für die vorschüssige Zahlung gilt. Man

denkt sich dann also die Jahresrente 1 in m einzelne Renten zerlegt, die sämtlich nur den Auszahlungswert $\frac{1}{m}$ aufweisen; man läßt gewissermaßen m einzelne Versicherungen abschließen, für die der Reihe nach die Barwerte

$$a_x, \; a_x + \frac{1}{m}, \; a_x + \frac{2}{m}, \; \ldots\ldots \; a_x + \frac{m-2}{m}, \; a_x + \frac{m-1}{m}$$

Geltung hätten, wenn die dadurch versicherten Renten den Auszahlungswert 1 aufwiesen. Da aber jede Rente nur mit dem Betrage $\frac{1}{m}$ ausgezahlt wird, so sind die sämtlichen Barwerte mit diesem Betrage zu multiplizieren. Man erhält dann für die nachschüssig zu zahlende Rente, die während des Jahres in m Raten auszuzahlen ist, die Gleichung:

$$\overset{(m)}{a}_x = \left[(a_x) + \left(a_x + \frac{1}{m}\right) + \left(a_x + \frac{2}{m}\right) + \ldots + \left(a_x + \frac{m-1}{m}\right)\right] \cdot \frac{1}{m},$$

also:

$$\overset{(m)}{a}_x = \left[m \cdot a_x + \frac{(m-1)\,m}{2\,m}\right] \cdot \frac{1}{m}$$

und schließlich die Formel:

$$(151\underline{a}) \qquad \overset{(m)}{a}_x = a_x + \frac{m-1}{2\,m}.$$

Für die vorschüssige Rente erhält man die entsprechende Formel, wenn man umgekehrt von dem Barwert der vorschüssigen Rente ausgeht und ihn allmählich bis auf den Barwert der nachschüssigen Rente ermäßigt. Es ist dann:

(a_x) der Barwert der Rente, die zum ersten Male sofort fällig wird,

$\left(a_x - \frac{1}{m}\right)$ der Barwert der Rente, die zum ersten Male fällig wird nach $\frac{1}{m}$ Jahr,

$\left(a_x - \frac{2}{m}\right)$ der Barwert der Rente, die zum ersten Male fällig wird nach $\frac{2}{m}$ Jahren,

u. s. w.

$\left(a_x - \frac{m-1}{m}\right)$ der Barwert der Rente, die zum ersten Male fällig wird nach $\frac{m-1}{m}$ Jahren.

Das letzte Glied $(a_x - 1) = a_x$ muß wieder wegbleiben, da es schon der Reihe des nächsten Jahres angehört. Man erhält dann für die vorschüssig zu zahlende Rente, die während des Jahres in m Raten auszuzahlen ist, die entsprechende Formel:

$$(151\underline{b}) \qquad \overset{(m)}{a}_x = a_x - \frac{m-1}{2m}.$$

Es sei erwähnt, daß man theorethisch die Rente auf beliebig kleine Teile des Jahres verteilen, also m beliebig groß annehmen kann. Denkt man sich schließlich eine Rente, die auf unendlich viele Teile des Jahres verteilt wird, aus der also fortlaufend Zahlungen zu leisten sind — man nennt das eine kontinuierliche Rente —, so nähert sich der Ausdruck $\frac{m-1}{2m}$ schließlich dem Werte $\frac{1}{2}$ so sehr, daß er sich von dem genauen Werte der halben Einheit gar nicht mehr unterscheidet. In der Sprache der Mathematik spricht man dann von einem Limeswert, und man schreibt:

$$\lim_{m=\infty} \frac{m-1}{2m} = \frac{1}{2}.$$

Der Barwert der nachschüssigen Rente geht dann also über in den Wert

$$(152\underline{a}) \qquad \bar{a}_x = \overset{(\infty)}{a}_x = a_x + \frac{1}{2},$$

während der Barwert der vorschüssig zu zahlenden Rente den Wert

(152b) $$\bar{\mathrm{a}}_x = \overset{(\infty)}{\mathrm{a}}_x = \mathrm{a}_x - \frac{1}{2}$$

annimmt. Da $\mathrm{a}_x = a_x + 1$ ist, so ergibt sich dann für beide Werte derselbe Ausdruck; es ist also:

(153) $$\bar{a}_x = \bar{\mathrm{a}}_x .$$

Praktisch kämen die beiden Barwerte schon bei täglicher Zahlung einander sehr nahe. Wenn man für $\frac{m-1}{2m}$ das Symbol μ einführt, so ist nämlich:

bei ganzjähriger Zahlung	$m = 1$,	$\mu = 0{,}0000000$,
bei halbjähriger Zahlung	$m = 2$,	$\mu = 0{,}2500000$,
bei vierteljähriger Zahlung	$m = 4$,	$\mu = 0{,}3750000$,
bei monatlicher Zahlung	$m = 12$,	$\mu = 0{,}4583333$,
bei wöchentlicher Zahlung	$m = 52$,	$\mu = 0{,}4903846$,
bei täglicher Zahlung	$m = 365$,	$\mu = 0{,}4986301$.

Es ist zu beachten, daß die hier angegebenen Werte von μ nur für die auf Lebenszeit abgeschlossene unmittelbar beginnende Leibrente Geltung haben. Wird daher zum Beispiel eine Rentenversicherung mit Wartefrist in der Weise abgeschlossen, daß die Renten unterjährig gezahlt werden, so ist der Wert μ sinngemäß anzuwenden. Es gilt dann zunächst die Gleichung:

(154) $${}_{n|}\mathrm{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x} = \frac{N_{x+n}}{D_{x+n}} \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} = {}_nE_x \cdot \mathrm{a}_{x+n} .$$

Von dem Barwert a_{x+n} kann daraufhin der Wert μ unmittelbar abgezogen werden. Es ergibt sich also die neue Gleichung:

$${}_{n|}\overset{(m)}{\mathrm{a}}_x = {}_nE_x \cdot [\mathrm{a}_{x+n} - \mu] ;$$

und daraus folgt schließlich die neue Formel:

(155) $${}_{n|}\overset{(m)}{\mathrm{a}}_x = {}_{n|}\mathrm{a}_x - \mu \cdot {}_nE_x .$$

Auch für kurze (temporäre) Leibrenten ist der Wert μ

entsprechend zu erweitern, da die allgemeine Gleichung $\mathrm{a}_x - a_x = 1$ für diese Form der Rentenversicherung ebenfalls keine Geltung hat. Es gelten vielmehr die Gleichungen:

$$\mathrm{a}_{x,\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x},$$

$$a_{x,\overline{n}|} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x},$$

$$\mathrm{a}_{x,\overline{n}|} - a_{x,\overline{n}|} = \frac{[\Sigma D_x - \Sigma D_{x+n}] - [\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+n+1}]}{D_x},$$

$$\mathrm{a}_{x,\overline{n}|} - a_{x,\overline{n}|} = \frac{D_x - D_{x+n}}{D_x} = 1 - {}_nE_x;$$

und es ergeben sich somit die neuen Formeln:

$$(156\underline{a})\qquad \overset{(m)}{a}_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} + \mu\,[1 - {}_nE_x] \qquad \text{und}$$

$$(156\underline{b})\qquad \overset{(m)}{\mathrm{a}}_{x,\overline{n}|} = \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} - \mu\,[1 - {}_nE_x]\,.$$

Die Formeln (156) können auch unmittelbar aus den Formeln (151) und (155) hergeleitet werden. Für die vorschüssig zu zahlende Rente erhält man dann die folgende Entwicklung:

$$\mathrm{a}_{x,\overline{n}|} = \mathrm{a}_x - {}_{n|}\mathrm{a}_x,$$

$$\overset{(m)}{\mathrm{a}}_{x,\overline{n}|} = [\mathrm{a}_x - \mu] - [{}_{n|}\mathrm{a}_x - \mu \cdot {}_nE_x],$$

also wieder:

$$(156\underline{b})\qquad \overset{(m)}{\mathrm{a}}_{x,\overline{n}|} = \mathrm{a}_{x,\overline{n}|} - \mu\,[1 - {}_nE_x]\,.$$

Für die nachschüssig zu zahlende Rente ergibt sich in derselben Weise die Formel (156$\underline{a}$).

Sollen nicht Renten, sondern Prämien unterjährig gezahlt werden, so liegt der Gedanke nahe, den Barwert der Versicherung mit dem Barwert einer unterjährig zu zahlenden Rente zu dividieren. An sich wäre dagegen auch gar nichts einzuwenden; nur hätte man dann zunächst nicht berücksichtigt, daß sich die unterjährige Prämienzahlung von der unterjährigen Rentenzahlung in einem Punkte doch

recht wesentlich unterscheidet, nämlich in dem Punkte der Verwaltungskosten. Wenn Renten unterjährig gezahlt werden, so ist das nur mit einer kaum merklichen Erhöhung der Verwaltungskosten verbunden. Die unterjährige Prämienzahlung aber bringt erhebliche Mehraufwendungen an Verwaltungskosten mit sich, schon allein deshalb, weil es sich da doch darum handelt, im Laufe des Jahres wiederholt von dem Versicherungsnehmer einen Betrag einzufordern, was erfahrungsgemäß oft mit Schwierigkeiten verbunden ist. Wenn also Prämien unterjährig gezahlt werden, so muß zu dem Aufschlag, der den Zinsverlust ersetzen soll, noch ein weiterer Aufschlag hinzukommen, der dazu zu dienen hat, die mehraufgewendeten Verwaltungskosten zu ersetzen. Wie hoch dieser zweite Aufschlag bemessen sein muß, das kann man nicht genau angeben; man hat den Aufschlag aber im allgemeinen angemessen berechnet, wenn man von der Annahme ausgeht, er müsse mindestens ebensoviel ausmachen wie der Aufschlag, der zur Deckung der entgangenen Zinsen zu dienen hat. Es handelt sich dann also zunächst darum, festzustellen, wie hoch dieser erste Aufschlag festzusetzen ist.

Angenommen, es werde die ganzjährige Prämie $\mathfrak{P}$ gezahlt und es sei der Gesellschaft möglich, diese Prämie zum Durchschnittszinssatz i ein volles Jahr hindurch unter Verzinsung zu halten. Die Gesellschaft verfügt dann nach einem Jahre über den Betrag $\mathfrak{P}(1+i)$. Daß, streng genommen, ein Teil der Prämie nicht auf Zinsen gelegt werden kann, da er sofort zu verwenden ist, kann hier unberücksichtigt bleiben, da man ja die Prämie einfach so auffassen könnte, daß man unter $\mathfrak{P}$ nur den zurückzulegenden Betrag versteht. Wird die Prämie nun in Raten entrichtet, so ist ihr zunächst der Aufschlag hinzuzufügen, der nur zur Deckung der entgangenen Zinsen zu dienen hat. Wird dieser Aufschlag der Einheit mit η bezeichnet, so gilt die Gleichung:

$$\mathfrak{P}^{m} = \mathfrak{P}[1+\eta], \tag{157}$$

wenn die Prämie in m gleichen Raten entrichtet werden

soll und der Jahresbetrag der Prämie demgemäß mit $\mathfrak{P}^m$ bezeichnet wird, wenn also jede Prämienrate den Betrag

$$\mathfrak{R}^m = \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{P}^m$$

ausmacht. Man geht dann für die weitere Entwicklung von der an sich zwar unzutreffenden, für die Rechnung jedoch zulässigen Annahme aus, jede Prämienrate werde pünktlich am Fälligkeitstage entrichtet. In Wirklichkeit ist das nicht der Fall, und zwar schon deshalb nicht, weil die Gesellschaft bekanntlich zur Entrichtung der Prämien eine bestimmte, meist auf einen Monat festgesetzte Zahlungsfrist, die sogenannte „Respektfrist" einräumt. Aber die damit verbundene Änderung des Zinssatzes gilt auch für die ganzjährige Zahlung; sie braucht also bei der unterjährigen Zahlung nicht mehr besonders berücksichtigt zu werden. Außerdem kommt die dadurch hervorgebrachte Änderung des Zinssatzes schon von selbst zum Ausdruck bei der Bestimmung des Durchschnittszinssatzes. Für die Rechnung muß nun die Forderung aufgestellt werden, daß die pünktlich an den Fälligkeitstagen entrichteten Prämienraten, wenn sie sämtlich bis zum Ende des Jahres aufgezinst werden, in ihrer Gesamtheit zusammen mit den Zinsen gerade so viel ausmachen wie die ganzjährige, ein volles Jahr hindurch aufgezinste Prämie, wenn diese pünktlich zu Beginn des Jahres entrichtet wird. Es ergibt sich dann also die folgende Zusammenstellung:

Es steht unter Verzinsung	es ergibt sich also am Schlusse des Jahres der Wert
die 1. Prämienrate $\frac{m}{m}$ Jahre hindurch,	$\left(1+\frac{m}{m}i\right)\mathfrak{R}^m$,
die 2. Prämienrate $\frac{m-1}{m}$ Jahre hindurch,	$\left(1+\frac{m-1}{m}i\right)\mathfrak{R}^m$,
die 3. Prämienrate $\frac{m-2}{m}$ Jahre hindurch,	$\left(1+\frac{m-2}{m}i\right)\mathfrak{R}^m$,
u. s. w.	
die m. Prämienrate $\frac{1}{m}$ Jahr hindurch,	$\left(1+\frac{1}{m}i\right)\mathfrak{R}^m$;

im ganzen ergibt sich also am Schlusse des Jahres der Betrag:

$$m \cdot \mathfrak{R}^m + i \cdot \mathfrak{R}^m \cdot \sum_{k=1}^{k=m} \frac{k}{m} = m \cdot \mathfrak{R}^m + \frac{m(m+1)}{2m} \cdot i \cdot \mathfrak{R}^m .$$

Berücksichtigt man dabei, daß $\mathfrak{R}^m = \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{P}^m$ ist, so erhält man, wenn die Forderung von der Gleichheit der Endwerte erfüllt sein soll, zunächst die Gleichung:

$$\mathfrak{P}(1+i) = \mathfrak{P}^m + \frac{m+1}{2m} \cdot i \cdot \mathfrak{P}^m . \tag{158}$$

Da aber $\mathfrak{P}^m = (1+\eta)\mathfrak{P}$ ist, so ergibt sich die weitere Entwicklung:

$$\mathfrak{P}(1+i) = \mathfrak{P}(1+\eta) + \frac{m+1}{2m} \cdot i \cdot \mathfrak{P}(1+\eta) ,$$

$$(1+i) = (1+\eta) + \frac{m+1}{2m} \cdot i \cdot (1+\eta) ,$$

$$\eta + \frac{m+1}{2m} \cdot i \cdot \eta = i - \frac{m+1}{2m} \cdot i ,$$

$$\eta \left[1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right] = \left[1 - \frac{m+1}{2m}\right] \cdot i ,$$

also schließlich die Formel:

$$\eta = \frac{1 - \frac{m+1}{2m}}{1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i} \cdot i . \tag{159}$$

Der mit η verbundene Faktor $\left[1 + \frac{m+1}{2m} \cdot i\right]$ weicht nun von der Einheit nur unwesentlich ab. Mit Rücksicht darauf, daß es sich hier ohnehin um eine Näherungsrechnung handelt, kann der Summand $\frac{m+1}{2m} \cdot i$ also vernachlässigt werden. Es ergibt sich dann die Näherungsformel:

$$(160) \qquad \eta = \frac{m-1}{2\,m} \cdot i\,.$$

Nimmt man an, die Gesellschaft rechne mit einem Durchschnittszinssatz von 4%, so erhält man nach der Formel (160) die folgende Zusammenstellung:

Es werden Prämienraten gezahlt	dann ist	also ist in Prozenten ausgedrückt
in Abständen von ½ Jahr,	$m = 2$,	$\eta = 1{,}00000\,\%$,
„ „ „ ¼ „	$m = 4$,	$\eta = 1{,}50000$ „ ,
„ „ „ 1 Monat,	$m = 12$,	$\eta = 1{,}83333$ „ ,
„ „ „ 14 Tagen,	$m = 26$,	$\eta = 1{,}92308$ „ ,
„ „ „ 1 Woche,	$m = 52$,	$\eta = 1.96154$ „ .

Sollten die Prämien täglich gezahlt werden, so ergäbe sich nahezu der Wert von 2 % als Aufschlag zur Deckung des Zinsverlustes.

Nimmt man nun an, der Aufschlag zur Deckung der vermehrten Verwaltungskosten sei ebenso hoch zu bemessen wie der Aufschlag zur Deckung der entgangenen Zinsen, so hat man für die Praxis die Einheit der Prämie um den Betrag $2\,\eta$ zu erhöhen. Zu beachten wäre dabei, daß der zweite Aufschlag im allgemeinen noch etwas zu niedrig bemessen sein dürfte, wenn die Zahlungstermine in kurzen Abständen aufeinander folgen. Man kann also für die halbjährige Zahlung sehr wohl einen Aufschlag von 2 % und für die vierteljährliche Zahlung zur Not auch noch einen Aufschlag von 3% der Jahresprämie festsetzen. Setzt man aber für die monatliche Zahlung einen Aufschlag von $3\frac{3}{4}$ % fest, so hat man schon sehr knapp gerechnet, und bei einwöchiger Zahlung wäre ein Aufschlag von 4% wohl unter allen Umständen zu niedrig. Man wird deshalb besser die Bestimmung treffen, daß der tatsächliche Aufschlag $\vartheta \cdot \eta$ nicht gleich $2\,\eta$ sei, sondern daß ϑ nach dem Werte von m abgestuft ist. Praktisch brauchbar wäre die folgende Art der Abstufung:

Zahlungsweise	m	ϑ
halbjährlich	2	2
vierteljährlich	4	$2^1/_2$
monatlich	12	3
zweiwöchentlich	26	$3^1/_2$
wöchentlich	52	4

Wollte man, anstatt in der hier angegebenen Weise den Aufschlag der unterjährigen Zahlung zu bestimmen, einfach mit einer unterjährigen Rente den Barwert dividieren, so ergäbe sich auch insofern noch ein Unterschied, als man dann eine laufende Prämie erhielte, die den allgemein üblichen Bestimmungen der Versicherungsbedingungen nicht entspräche, da dann die noch nicht entrichteten Prämienraten nicht als gestundet zu gelten hätten, also nicht an der etwa bewirkten Leistung abgezogen werden dürften.

18. Kapitel.

Die Versicherung auf verbundene Leben.

Die Versicherung auf das einzelne Leben ist das gewöhnliche; es gibt indes Fälle, in denen es sich empfiehlt, die Versicherung so einzurichten, daß sie gleichzeitig auf das Leben zweier Personen, bisweilen auch auf das Leben von mehr als zwei Personen abgeschlossen wird. Man spricht dann von einer Versicherung auf verbundene Leben. Hier mag in der Hauptsache nur von zwei verbundenen Leben die Rede sein. Wenn ausnahmsweise in der Praxis einmal der Fall vorkommen sollte, daß die Versicherung gleichzeitig auf das Leben von mehr als zwei Personen abgeschlossen werden soll, so sind die für zwei Leben angegebenen Formeln entsprechend zu erweitern.

I. Die Versicherung auf den Lebensfall und die Rentenversicherung.

Wie für ein einzelnes Leben die Versicherung auf den Lebensfall so gestaltet ist, daß die versicherte Summe nur dann fällig wird, wenn der einzelne Versicherte nach n Jahren noch am Leben ist, so muß für die Versicherung auf verbundene Leben zunächst die Bedingung erfüllt sein, daß beide Personen nach n Jahren noch am Leben sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein xjähriger nach n Jahren noch am Leben ist, ist ausgedrückt durch die Gleichung:

$$_{n}p_{x} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}}.$$

Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein yjähriger nach n Jahren noch am Leben ist, ausgedrückt durch die entsprechende Gleichung:

$$_{n}p_{y} = \frac{l_{y+n}}{l_{y}}.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß nach n Jahren beide Personen zugleich noch am Leben sind, ist also ausgedrückt durch die Gleichung:

$$(161) \qquad _{n}p_{x,y} = {_{n}p_{x}} \cdot {_{n}p_{y}} = \frac{l_{x+n}}{l_{x}} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_{y}}.$$

Soll nun der Barwert, also die einmalige Nettoprämie einer gleichzeitig auf das Leben des xjährigen und des yjährigen abgeschlossenen Versicherung auf den Lebensfall berechnet werden, so hat man folgendermaßen zu entwickeln:

Wäre das Kapitel 1 nach n Jahren unbedingt fällig, so hätte es im Zeitpunkte des Abschlusses der Versicherung den Wert v^n. Es wird aber nur mit der Wahrscheinlichkeit fällig, daß beide Personen alsdann noch am Leben sind. Bezeichnet man also den Barwert mit $_{n}E_{x,y}$, so gilt die Gleichung:

$$_{n}E_{x,y} = v^{n} \cdot {_{n}p_{x,y}} = v^{n} \cdot \frac{l_{x+n}}{l_{x}} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_{y}},$$

aus der sich dann zunächst die Formel ergibt:

$$(162^{\underline{a}})\qquad {}_nE_{x,y} = \frac{l_{x+n} \cdot v^{y+n} \cdot l_{y+n}}{l_x \cdot v^y \cdot l_y}\,.$$

Stellt man die Werte von der Form $l_x \cdot v^y \cdot l_y = l_x \cdot D_y$ tabellarisch zusammen und bezeichnet man sie mit dem Symbol $D_{x,y}$, so erhält man die einfachere Formel:

$$(162^{\underline{b}})\qquad {}_nE_{x,y} = \frac{D_{x+n,y+n}}{D_{x,y}}\,.$$

Anstatt mit v^y zu erweitern, hätte man auch mit v^x erweitern können. Man hätte dann die Gleichung

$$(162^{\underline{c}})\qquad {}_nE_{x,y} = \frac{v^{x+n} \cdot l_{x+n} \cdot l_{y+n}}{v^x \cdot l_x \cdot l_y}$$

erhalten; und wenn man die Werte $v^x \cdot l_x \cdot l_y$ tabellarisch zusammengestellt hätte, die man ebenfalls mit $D_{x,y}$ hätte bezeichnen können, so hätte sich gleichfalls die Formel ($162^{\underline{b}}$) ergeben. Für die Erweiterung mit v^y kann man den folgenden Zweckmäßigkeitsgrund anführen:

In der Versicherung auf verbundene Leben handelt es sich zu einem sehr großen Teil um die gleichzeitige Versicherung einer männlichen und einer weiblichen Person, wobei die männliche Person gewöhnlich älter ist als die weibliche. Das Alter der weiblichen Person bezeichnet man dabei meist mit y. Es ist dann also meist $x > y$ und daher $l_x < l_y$. Diskontiert man aber einen Wert, so wird er verkleinert. Wenn man also die größere Zahl l_y diskontiert, so gehen im allgemeinen die beiden Werte l_x und D_y in ihrer Größenordnung nicht so weit auseinander, wie das geschähe, wenn man die ohnehin schon kleinere Zahl l_x diskontierte.

Als selbständige Versicherung kommt die reine Erlebensfallversicherung auf verbundene Leben fast nie, als Zusatzversicherung äußerst selten vor. Mittelbar wird aber die Formel (162) recht häufig angewendet. Denn ebenso, wie das bei der Versicherung auf ein einzelnes Leben geschieht, bildet man auch in der Versicherung auf verbundene Leben

die Formel für den Rentenbarwert aus der Formel des Barwertes der Erlebensfallversicherung, indem man diese Formel wiederholt anwendet. Man erhält dann den Barwert der sogenannten Verbindungsrente, den man mit $a_{x,y}$ bezeichnet. Mit diesem Symbol wird also bezeichnet der Barwert der Rente 1, die zu Anfang eines jeden Jahres fällig wird, solange zwei Personen im Alter von x und y Jahren beide noch am Leben sind, solange also die Verbindung der beiden Personen nicht durch das Ableben der einen oder der anderen Person aufgelöst ist. Für die Verbindungsrente gilt also zunächst die Gleichung:

$$(163\underline{^a})\qquad a_{x,y} = {}_0E_{x,y} + {}_1E_{x,y} + {}_2E_{x,y} + {}_3E_{x,y} + \ldots\ldots$$
$$= \frac{D_{x,y} + D_{x+1,y+1} + D_{x+2,y+2} + D_{x+3,y+3} + \ldots\ldots}{D_{x,y}};$$

und daraus folgt ohne weiteres die Formel:

$$(163\underline{^b})\qquad a_{x,y} = \frac{\Sigma D_{x,y}}{D_{x,y}} = \frac{N_{x,y}}{D_{x,y}}.$$

Mit $N_{x,y}$ ist dabei entsprechend der Bezeichnung, die für ein einzelnes Leben gilt, die Summe der diskontierten Zahlen der lebenden Paare bezeichnet.

In derselben Weise ergibt sich dann für den Barwert der kurzen Rente auf verbundene Leben die Formel:

$$(164)\quad a_{x,y,\overline{n}|} = \frac{\Sigma D_{x,y} - \Sigma D_{x+n,y+n}}{D_{x,y}} = \frac{N_{x,y} - N_{x+n,y+n}}{D_{x,y}},$$

und demgemäß für den Barwert der Versicherung mit Aufschubsfrist die Formel:

$$(165)\qquad {}_{n|}a_{x,y} = a_{x,y} - a_{x,y,\overline{n}|} = \frac{N_{x+n,y+n}}{D_{x,y}}.$$

Diese Form wäre so zu verstehen, daß nur dann auf die Zahlung der ersten Rente Anspruch besteht, wenn beide Personen nach n Jahren noch am Leben sind. Auch hier gilt also die Gleichung:

$$(166)\qquad {}_{n|}a_{x,y} = {}_nE_{x,y} \cdot a_{x+n,y+n},$$

wie denn überhaupt die Formeln für die Versicherung auf

verbundene Leben den Formeln der Versicherung auf das einzelne Leben im allgemeinen entsprechen.

Liegt eine regelrechte Rentenversicherung auf verbundene Leben vor, so ist zunächst der Barwert der nachschüssigen Verbindungsrente zu berechnen nach der Formel:

$$(167) \qquad a_{x,y} = \frac{N_{x+1,y+1}}{D_{x,y}} = a_{x,y} - 1 \,.$$

In dieser Form kommt die Versicherung jedoch nicht vor. Denn es hätte keinen Sinn, die Versicherung in der Weise abzuschließen, daß die Rente nur solange gezahlt wird, als beide Personen gemeinschaftlich am Leben sind. Eine wichtige Bestimmung ist vielmehr die, daß die Rente, wenn eine der beiden Personen stirbt, entweder voll oder doch wenigstens zum Teil an die überlebende Person übergeht. Eine solche Rente wird dann also gezahlt, solange wenigstens eine der beiden Personen am Leben ist. Man bezeichnet diese Rente gewöhnlich als „Rente bis zum zweiten Tode“ oder schlechthin einfach als „Rente auf verbundene Leben“. Man bestimmt den Barwert einer solchen Rente sehr einfach in der Weise, daß man ihn aus den Barwerten anderer Renten zusammensetzt. Soll die Rente voll auf die überlebende Person übergehen, so bezeichnet man den Barwert mit dem Symbol $a_{x,\overline{y}}$, wobei die Rente nachschüssig gezahlt werden soll. Man faßt die Rente dann so auf, wie wenn zunächst auf das Leben beider Personen je eine einzelne Versicherung abzuschließen wäre. Man geht also aus von der Summe $(a_x + a_y)$. Dieser Barwert wäre richtig, sobald eine der beiden Personen gestorben ist. Denn dann bleibt für die andere Person infolge der auf ihr eigenes Leben bestehenden Rentenversicherung die Zahlung der Rente 1 für die fernere Lebensdauer weiter erhalten. Solange dagegen beide Personen am Leben sind, kann der Barwert keine Geltung haben. Denn wollte man eine Versicherung zum Barwert $(a_x + a_y)$ tatsächlich abschließen, so wäre ja, solange beide Personen am Leben sind, an jede Person die Rente 1, an beide Per-

sonen zusammen also im ganzen die Rente 2 auszuzahlen. Es soll aber doch auch, solange beide Personen am Leben sind, nur die Rente 1 ausgezahlt werden. Es muß also für die Dauer, da beide Personen am Leben sind, der Barwert der Rente 1 abgezogen werden. Dieser Barwert ist nichts anderes als der Barwert der Verbindungsrente. Es gilt also die Gleichung:

$$(168) \qquad a_{\overline{x,y}} = a_x + a_y - a_{x,y}\,.$$

Soll die Rente an die überlebende Person nicht voll, sondern nur zu einem bestimmten Satze ε weitergezahlt werden, so kann man den Barwert einer solchen Rente in ähnlicher Weise bestimmen. Man geht dabei stets aus von dem Wert, mit dem die Rente an die überlebende Person übergehen soll, und bildet zunächst die Summe der einzelnen Renten, die nur mit diesem Werte auszuzahlen sind. Von der Summe dieser einzelnen Renten zieht man dann ab die Verbindungsrente, die man dabei mit dem Werte zu multiplizieren hat, der angibt, um wieviel die Rente bei Lebzeiten beider Personen zu hoch ausfiele, wenn man die Versicherung zu dem vorher berechneten Gesamtwert der beiden einzelnen Renten abschlösse. Bezeichnet man den Barwert der Rente, die nur zum Satze ε an die überlebende Person übergehen soll, mit dem Symbol $a_{\overline{x,y}}^{\varepsilon}$, so gilt also ganz allgemein die Formel:

$$(169) \qquad a_{\overline{x,y}}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot a_x + \varepsilon \cdot a_y - (2\,\varepsilon - 1)\, a_{x,y}\,.$$

Geht die Rente zum Beispiel zum Satze von drei Vierteln an die überlebende Person über, so ist $\varepsilon = \frac{3}{4}$. Mithin erhält man die Formel:

$$(170^{\underline{a}}) \qquad a_{\overline{x,y}}^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}\, a_x + \frac{3}{4}\, a_y - \frac{1}{2}\, a_{x,y}\,.$$

Geht die Rente zum Satze von zwei Dritteln an die über-

lebende Person über, so ist $\varepsilon = \frac{2}{3}$, und es ergibt sich die Formel:

$$(170^{\underline{b}}) \qquad a_{x,y}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}\, a_x + \frac{2}{3}\, a_y - \frac{1}{3}\, a_{x,y}\,.$$

Geht endlich die Rente nur mit der Hälfte ihres ursprünglichen Betrages an die überlebende Person über, so ist $\varepsilon = \frac{1}{2}$; es ergibt sich dann also die Formel:

$$(170^{\underline{c}}) \qquad a_{x,y}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, a_x + \frac{1}{2}\, a_y\,.$$

Die Verbindungsrente verschwindet in diesem Falle also vollständig. In der Tat läßt auch eine einfache Überlegung leicht erkennen, daß eine Versicherung auf verbundene Leben dann gar nicht mehr vorliegt; denn es braucht nur einfach auf jedes der beiden einzelnen Leben die halbe Rente versichert zu werden.

Der Wert ε ist im allgemeinen an die Bestimmung gebunden, daß

$$\frac{1}{2} \leqq \varepsilon \leqq 1$$

sein soll. Andere Formen des Übergangs hätten wirtschaftlich keinen rechten Sinn. Schon die Rente mit halbem Übergang ist wirtschaftlich wenig zu empfehlen, da, wie leicht einzusehen ist, eine einzelne Person zur Bestreitung ihres Lebensunterhaltes mehr als die Hälfte dessen aufzuwenden hat, was zwei Personen gemeinschaftlich dazu nötig haben. Wirtschaftlich am vorteilhaftesten ist die Form der Rente, die mit zwei Dritteln oder mit drei Vierteln an die überlebende Person übergeht.

Eine besondere Form der Rentenversicherung ist die einseitige Überlebensrente, die meist als Witwenrente angewendet wird. Es wird dann bestimmt, daß zunächst überhaupt keine Rente auszuzahlen ist. Nur wenn

die begünstigte Person beim Ableben der versorgenden Person, also wenn zum Beispiel die Frau beim Ableben des Mannes noch am Leben ist, nur dann soll die Rente an die überlebende Person ausgezahlt werden, solange diese noch am Leben bleibt. Bezeichnet man eine solche Rente mit dem Symbol $a_{x,\overline{y}}$, wobei x das Alter der versorgenden, y das Alter der versorgten Person ist, so kann man auch den Barwert dieser Rente als Unterschied zweier anderen Rentenbarwerte darstellen. Man geht dann aus von der unmittelbar auf das Leben der versorgten Person abgeschlossenen Rente, deren Barwert mit a_y (oder a_y) angegeben ist. Wäre eine solche Versicherung abgeschlossen, so wäre die Rente dauernd zu zahlen. Sie soll aber nicht gezahlt werden, solange beide Personen am Leben sind. Folglich ist der Barwert der Verbindungsrente, also der Wert $a_{x,y}$ (oder $\mathrm{a}_{x,y}$) abzuziehen. Es ergibt sich somit die Formel:

(171)
$$a_{x,\overline{y}} = a_y - a_{x,y}$$
$$(\mathrm{a}_{x,\overline{y}} = \mathrm{a}_y - \mathrm{a}_{x,y}).$$

Eine einseitige Überlebensrente (eine Witwenrente) wird gewöhnlich nicht zur einmaligen Prämie, sondern mit laufender Prämienzahlung abgeschlossen. Die laufende Prämie ist selbstverständlich höchstens solange zu zahlen, als beide Personen am Leben sind. Stirbt der Versorger, so beginnt der Rentenlauf, falls die versorgte Person alsdann noch am Leben ist. Stirbt die versorgte Person, so gilt die Versicherung als beendet, ohne daß weiterhin Ansprüche geltend gemacht werden können. In beiden Fällen hört sofort die Prämienzahlung auf. Für die bis zum ersten Tode zu zahlende Nettojahresprämie ergibt sich also die Formel:

(172)
$$^{a}\mathrm{P}_{x,\overline{y}} = \frac{a_y - a_{x,y}}{\mathrm{a}_{x,y}}.$$

Rechnet man hier aus Bequemlichkeitsgründen auch im Zähler mit den Barwerten der vorschüssigen Rente, so er-

hält man statt dessen die Formel:

$$(172\underline{b})\qquad {}^{a}P_{x,\overline{y}} = \frac{a_y - a_{x,y}}{a_{x,y}} = \frac{a_y}{a_{x,y}} - 1\,.$$

Bestimmt man, daß die Prämie bis zum ersten Tode, längstens jedoch t Jahre hindurch zu entrichten sein soll, so erhält man endlich die Formel:

$$(173)\qquad {}_{t}^{a}P_{x,\overline{y}} = \frac{a_y - a_{x,y}}{a_{x,y,\overline{t}|}}\,.$$

Es sei hier ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Versicherung einer einseitigen Überlebensrente wie eine Todesfallversicherung zu behandeln ist, daß sie also im allgemeinen nicht ohne die vorherige Gesundheitsprüfung des Versorgers abgeschlossen werden soll. Auch sind die Zuschläge vorsichtig zu bemessen. Auf keinen Fall sollten sie im Verhältnis der Prämie selbst berechnet werden, da die Prämie meist ziemlich gering ausfällt. Am besten bestimmt man den Zuschlag im Verhältnis der Renteneinheit, wobei man nötigenfalls den Aufschlag für einmalige Unkosten und den Aufschlag für laufende Unkosten getrennt hinzufügen kann.

Wird die Versicherung zur einmaligen Prämie abgeschlossen, so genügt fast stets ein einfacher Aufschlag nach der Formel:

$$(174)\qquad \mathfrak{A}_{x,\overline{y}} = a_y - a_{x,y} + \beta\,,$$

wobei $\beta = 0{,}3$ als ausreichend angesehen werden kann, wenn für den Barwert a_y eine Rententafel und für den Barwert $a_{x,y}$ eine Todesfalltafel zugrunde gelegt wird. Soll auch für den Barwert a_y eine Todesfalltafel zugrunde gelegt werden, so muß der Aufschlag β entsprechend höher bemessen sein.

Werden Jahresprämien entrichtet, so genügt es meist, wenn man sich einer Formel von der Form

$$(175)\qquad \mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{A}}{(1-\gamma)\cdot a}$$

bedient, wobei dann $\gamma = 0{,}05$ als ausreichend angesehen werden kann.

Sollen mehr als zwei Personen versichert werden, so lassen sich Formeln aufstellen, die den für zwei Personen geltenden Formeln völlig entsprechen. Für den Barwert der Verbindungsrente gilt zum Beispiel bei drei Personen die Formel:

$$(176) \qquad a_{x,y,z} = \frac{\Sigma D_{x,y,z}}{D_{x,y,z}} = \frac{N_{x,y,z}}{D_{x,y,z}},$$

wobei dann $D_{x,y,z} = l_x \cdot l_y \cdot l_z \cdot v^z$ zu setzen ist. Soll zum Beispiel auf das Leben von drei Personen eine „Rente bis zum dritten Tode" abgeschlossen werden, so gilt die Formel:

$$(177) \quad a_{\overline{x,y,z}} = a_x + a_y + a_z - a_{x,y} - a_{x,z} - a_{y,z} + a_{x,y,z}.$$

Es gibt eine einfache Probe, mit deren Hilfe man feststellen kann, ob man derartige Formeln wenigstens grundsätzlich richtig aufgestellt hat. Man nimmt an, eine der versicherten Personen sei gestorben, oder es seien bereits zwei oder mehr Personen gestorben, wobei man die Personen beliebig auswählen kann. Die Barwerte, in deren Indices die betreffenden Personen vorkommen, läßt man unberücksichtigt. Was dann von der Formel noch übrig bleibt, muß, wenn man alle Barwerte als Einheiten ansieht, stets den Wert 1 ergeben. Nimmt man von drei Personen zum Beispiel die dritte als gestorben an, so sind in der Formel (177) die Barwerte a_z, $a_{x,z}$, $a_{y,z}$ und $a_{x,y,z}$ wegzulassen. Es bleiben dann noch übrig die beiden positiven Barwerte a_x und a_y sowie der negative Barwert $a_{x,y}$. Setzt man die Barwerte gleich der Einheit, so ergibt sich in der Tat der Wert 1. Nimmt man weiter an, es sei auch die zweite Person gestorben, so bleibt von der Formel nur noch der eine positive Barwert a_x übrig, der dann also gleich der Einheit zu setzen ist. Selbstverständlich versagt diese Probe beispielsweise bei einseitigem Übergang sowie in anderen Fällen besonderer Art.

II. Die Versicherung auf den Todesfall.

Soll auf das Leben von zwei (oder mehr) Personen eine Todesfallversicherung abgeschlossen werden, so bestimmt man den Barwert einer solchen Versicherung am besten mit Hilfe der allgemeinen Formel:

$$A = 1 - d \cdot a\,.$$

Für den Barwert der Versicherung „auf Lebenszeit" erhält man dann die besondere Formel:

$$(178^{\underline{a}}) \qquad A_{x,y} = 1 - d \cdot a_{x,y}\,.$$

Die versicherte Summe wird sofort beim ersten Tode fällig. Kürzt man die Versicherungsdauer auf n Jahre ab, so erhält man die entsprechende Formel:

$$(178^{\underline{b}}) \qquad A_{x,y,\overline{n}|} = 1 - d \cdot a_{x,y,\overline{n}|}\,.$$

Die Versicherung kann auch auf mehr als zwei Leben ausgedehnt werden. Wird sie zum Beispiel auf das Leben von drei Personen abgeschlossen, so erhält man ganz allgemein die Formel:

$$(179) \qquad A_{x,y,z} = 1 - d \cdot a_{x,y,z}\,.$$

Dabei hat man dann statt des Barwertes der einfachen Verbindungsrente den Barwert der entsprechenden abgekürzten Verbindungsrente zu setzen, wenn die Versicherungssumme sofort beim ersten Tode, spätestens jedoch nach einer im voraus bestimmten Anzahl von Jahren fällig werden soll. Auch sonst kann man der Formel (179) allgemeine Geltung zuschreiben; man muß nur immer den in der Formel enthaltenen Rentenbarwert der gewählten Versicherungsform anpassen. Wäre zum Beispiel die Bestimmung getroffen, daß die Versicherungssumme nicht sofort nach dem ersten Tode ausgezahlt werden soll, sondern daß sie erst nach dem letzten Tode fällig werden soll, so wäre in der Formel (179) die Verbindungsrente $a_{x,y,z}$ durch die bis zum letzten Tode laufende Rente $a_{\overline{x,y,z}}$ zu ersetzen.

Aus den Summenbarwerten $A_{x,y}$ lassen sich mit Hilfe der Rentenbarwerte ohne weiteres die Nettojahresprämien berechnen. Es kommen hier im besonderen die folgenden vier Formeln in Betracht:

1. Für die einfache Versicherung auf das erste Ableben, für die die Prämie ebenfalls bis zum ersten Tode gezahlt werden soll, ergibt sich die Formel:

$$(180\underline{a}) \qquad P_{x,y} = \frac{1 - d \cdot a_{x,y}}{a_{x,y}} = \frac{1}{a_{x,y}} - d\,.$$

2. Wird für dieselbe Versicherung die Prämienzahlungsdauer auf t Jahre abgekürzt, so ergibt sich die Formel:

$$(180\underline{b}) \qquad {}_tP_{x,y} = \frac{1 - d \cdot a_{x,y}}{a_{x,y,\overline{t|}}}\,.$$

3. Wird die Versicherungsdauer auf n Jahre, die Prämienzahlungsdauer auf t Jahre abgekürzt, wobei $t \leq n$ sein muß, so ergibt sich die Formel:

$$(180\underline{c}) \qquad {}_tP_{x,y,\overline{n|}} = \frac{1 - d \cdot a_{x,y,\overline{n|}}}{a_{x,y,\overline{t|}}}\,.$$

4. Wird dabei die Prämienzahlungsdauer der Versicherungsdauer gleichgesetzt, wird also $t = n$, so ergibt sich für die gewöhnliche gemischte Versicherung auf verbundene Leben endlich die Formel:

$$(180\underline{d}) \quad P_{x,y,\overline{n|}} = \frac{1 - d \cdot a_{x,y,\overline{n|}}}{a_{x,y,\overline{n|}}} = \frac{1}{a_{x,y,\overline{n|}}} - d\,.$$

Für die sonst etwa noch vorkommenden Formen der Versicherung auf verbundene Leben sind die Formeln sinngemäß zu entwickeln. Das gilt im besonderen auch für die Berechnung des Deckungskapitals. Dieses wird im allgemeinen nach der für zwei (oder mehr) Leben entsprechend abgeänderten Grundformel ${}_mV = A_m - P \cdot a_m$ berechnet werden.

Die Versicherung auf verbundene Leben bietet für die Praxis insofern einige Schwierigkeiten, als man nicht mit

einer einzigen Tafel der Grundwerte (der sogenannten Kommutationswerte) auskommt, sondern deren eine nicht geringe Zahl nötig hat. Es muß, streng genommen, für jeden Altersunterschied $(x - y)$ eine solche Tafel vorhanden sein, wobei $x > y$ oder $x < y$ sein kann. Arbeitet man mit Grundlagen, die nach den Geschlechtern getrennt sind, was in der Rentenversicherung das Gegebene ist, so werden die Schwierigkeiten noch erhöht.

Um sich die Berechnung nach Möglichkeit zu vereinfachen, hat man in der Praxis wenigstens für die Todesfallversicherung auf verbundene Leben die sehr zweckmäßige Einrichtung getroffen, mit einem „Zwischenalter" zu rechnen. Man ersetzt dann die Alter x und y beide durch dasselbe Alter z, sodaß man nur eine einzige Tafel von Grundwerten nötig hat, eine Tafel für gleichaltrige verbundene Leben.

Für die Berechnung des „Zwischenalters" gibt es mathematisch strenge Methoden, bei denen die Sterbeintensität eine Rolle spielt. Die Praxis bedient sich ihrer im allgemeinen nicht, sondern schafft sich einfachere Methoden. So pflegt man zum Beispiel so zu rechnen, daß man das Zwischenalter bestimmt, indem man von dem höheren der beiden gegebenen Alter drei Viertel, von dem niedrigeren Alter ein Viertel nimmt und die beiden Teile zusammenfügt. Ist beispielsweise $x = 32$, $y = 24$, so ersetzt man den Barwert $a_{32,24}$ durch den Barwert $a_{30,30}$. Auch für mehr als zwei Leben lassen sich solche Näherungsmethoden einrichten.

Aufgabensammlung
zum Lehrbuch der Versicherungsrechnung

Von

Professor Dr. Albrecht Patzig
Privatdozent an der Universität
zu Frankfurt a. M.

Bearbeitet im Anschluß an die Vorlesungen des Verfassers und unter Berücksichtigung der wichtigsten Erfordernisse der Praxis

Zweiter Teil

1925
Verlag von Wilh. Langguth, Esslingen a. N.

Satz und Druck:
Buchdruckerei Wilh. Langguth, Esslingen a. N.

Inhaltsverzeichnis

Nr. der Aufgabe	Inhalt der Aufgabe	Seite

Nr. der Aufgabe	Inhalt der Aufgabe	Seite

Anmerkung: Obwohl in der Fachpraxis eine sehr genaue Berechnung der einzelnen Werte keinen rechten Sinn hätte und auch gar nicht nötig ist, sind die folgenden Aufgaben doch mit einer solchen Genauigkeit durchgerechnet. Das ist erstens der Übung wegen geschehen, zweitens aber auch deshalb, weil es nur auf diese Weise möglich war, das Abrundungsverfahren richtig zu erkennen zu geben, und weil bisweilen die Ergebnisse verschiedener Rechnungsweisen miteinander verglichen werden sollten. Es sei auch noch bemerkt, daß die letzte Stelle der Rechenergebnisse keinen Anspruch darauf machen soll, als genau zu gelten, daß sich in dieser Beziehung zum Beispiel Abweichungen ergeben können zwischen den durch Rechnung gefundenen und den in den beigefügten Tafeln gegebenen Werten.

Die in den Aufgaben mit Nummern angegebenen Formeln finden sich im Lehrteil [Erster Teil: „Lehrbuch der Versicherungsrechnung"].

Aufgabe 1

Der Ausdruck

$$x = \sqrt[3]{\frac{502,775}{126,378} - (1,0175)^2}$$

ist logarithmisch zu berechnen.

$$\begin{array}{rcl} \log 502,77 & = & 2,701\,3694 \\ \log 502,78 & = & \underline{2,701\,3780} \\ \text{Diff.} & = & 0,000\,0086 \\ 0,5 \cdot \text{Diff.} & = & 0,000\,0043 \\ \log 502,775 & = & 2,701\,3737 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \log 126,37 & = & 2,101\,6440 \\ \log 126,38 & = & \underline{2,101\,6784} \\ \text{Diff.} & = & 0,000\,0344 \\ 0,8 \cdot \text{Diff.} & = & 0,000\,0275 \\ \log 126,378 & = & 2,101\,6715 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \log 502,775 & = & 2,701\,3737 \\ \log 126,378 & = & \underline{2,101\,6715} \\ \text{Diff.} & = & 0,599\,7022 \\ \text{Numerus} & = & 3,978\,34\,. \end{array}$$

Die Mantisse 599 6975 gibt den Numerus 39783; die Mantisse 599 7084 gibt den Numerus 39 784. Der Unterschied der Mantissen beträgt 109 Einheiten, wovon 47 Einheiten $\left(\text{etwa } \frac{4}{10}\right)$ zu interpolieren sind. Es ergibt sich also der Numerus 39 7834.

$$\begin{array}{rcl} \log 1,0175 & = & 0,0075\,344 \\ \log [1,0175]^2 & = & 0,0150\,688 \\ [1,0175]^2 & = & 1,03531\,. \end{array}$$

Die Mantisse 015 0662 gibt den Numerus 10 353; die Mantisse 0151082 gibt den Numerus 10 354. Der Unterschied der Mantissen beträgt 420 Einheiten, wovon 26 Einheiten $\left(\text{am nächsten gleich } \frac{1}{10}\right)$ zu interpolieren sind. Es ergibt sich also der Numerus 103 531.

$$\begin{aligned}
\text{Zweiter Numerus} &= 1{,}03\,531\\
\text{Erster Numerus} &= \underline{3{,}97\,834}\\
\text{Diff.} = x^3 &= 2{,}94\,303\\
\log x^3 &= 0{,}468\,7947\\
\log x &= 0{,}156\,2649\\
x &= 1{,}43306.
\end{aligned}$$

Anmerkung: Beim Rechnen mit Logarithmen ist zu beachten, daß der Logarithmus einer Zahl, die potenziert werden soll, genauer genommen werden muß als die Logarithmen der übrigen Zahlen. Wird z. B. mit 5stelligen Logarithmen gerechnet, und ist eine der Zahlen in die 30. Potenz zu erheben, so ist der Logarithmus dieser Zahl mindestens um 1 Stelle, besser um 2 Stellen genauer zu nehmen als die Logarithmen der übrigen Zahlen.

Aufgabe 2

Zu welchem Kapital wächst eine einmalige Einlage von 7500 Mk. in 30 Jahren an, wenn mit 4%igen Zinsen und Zinseszinsen gerechnet wird? [Formel (2)].

$k_0 = 7500$
$i = 0{,}04$
$n = 30$
$\log (1 + i) = 0{,}017\,0333(4)$

$$\begin{aligned}
n \cdot \log (1 + i) &= 0{,}511\,0002\\
\log k_0 &= \underline{3{,}875\,0613}\\
\log k_n &= 4{,}386\,0615\\
k_n &= 24\,325{,}50 \text{ Mk.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Welchen Wert hat bei 3½%iger Verzinsung ein Kapital von 30 000 Mk., das erst nach 20 Jahren fällig wird? [Formel (3a)].

$k_n = 30\,000$
$i = 0{,}035$
$n = 20$
$\log (1 + i) = 0{,}014\,9403(5)$

$$\begin{aligned}
n \cdot \log (1 + i) &= 0{,}298\,8070\\
\log k_n &= \underline{4{,}477\,1213}\\
\log k_0 &= 4{,}178\,3143\\
k_0 &= 15\,077.\text{— Mk.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Ein Kapital von 10 000 Mk. hat 14 Jahre hindurch auf Zinsen gestanden und sich während dieser Zeit auf den Betrag von 16 743 Mk. erhöht. Zu welchem Zinssatz war es ausgeliehen? [Formel (4)].

$$k_0 = 10\,000 \qquad \log k_n = 4{,}223\,8333$$
$$k_n = 16\,743 \qquad \log k_0 = 4{,}000\,0000$$
$$n = 14 \qquad \text{Diff.} = 0{,}223\,8333$$
$$\frac{1}{14} \cdot \text{Diff.} = 0{,}015\,9881$$
$$1 + i = \text{num.} = 1{,}037\,5$$
$$\underline{i = 0{,}0375} \qquad (3\tfrac{3}{4}\,\%).$$

Aufgabe 5

Ein Kapital von 30 000 Mk. hat zu $4\frac{1}{2}\%$ auf Zinsen gestanden und sich auf den Betrag von 102 891 Mk. erhöht. Wie lange hat die Verzinsung gedauert? [Formel (5)].

$$\log k_n = 5{,}012\,3774$$
$$k_0 = 30\,000 \qquad \log k_0 = 4{,}477\,1213$$
$$k_n = 102\,891 \qquad \text{Zähler} = 0{,}535\,2561$$
$$i = 0{,}045 \qquad \text{Nenner} = 0{,}019\,1163$$

$$\log(1+i) = 0{,}019\,1163 \qquad \begin{aligned} \log \text{Zähler} &= 9{,}728\,561(7) - 10 \\ \log \text{Nenner} &= 8{,}281\,403(8) - 10 \\ \log n &= 1{,}447\,157(9) \end{aligned}$$

$\underline{n = 28.}$ Die Verzinsung hat 28 Jahre gedauert.

Aufgabe 6

In welcher Zeit erhöht sich bei einer bestimmten Verzinsung ein Kapital auf den m-fachen Betrag des Anfangswertes?

Es ist:

$$k_n = m \cdot k_0,$$

also:

$$k_n = (1+i)^n \cdot k_0,$$
$$m \cdot k_0 = (1+i)^n \cdot k_0,$$
$$m = (1+i)^n,$$
$$\underline{n = \frac{\log m}{\log (1+i)}}.$$

Ist m = 2, so erhält man die Zeit, in der sich ein Kapital verdoppelt. Beispielsweise ergeben sich für eine Verzinsung von 3%, 3½% und 4% die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}301\,0300 \\ \log (1{,}03) &= 0{,}012\,8372 \\ \log (1{,}035) &= 0{,}014\,9403 \\ \log (1{,}04) &= 0{,}017\,0333 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log\log 2 &= 9{,}478\,609(8) - 10 \\ \log\log (1{,}03) &= 8{,}108\,470(3) - 10 \\ \log\log (1{,}035) &= 8{,}174{,}359(3) - 10 \\ \log\log (1{,}04) &= 8{,}231\,298(8) - 10 \end{aligned}$$

3% $\quad \log n = 1{,}370\,139(5)$
$\quad n = 23{,}449\,8$ [etwa 23½ Jahre],

3½% $\quad \log n = 1{,}304\,250(5)$
$\quad n = 20{,}148\,9$ [etwa $20^1/_6$ Jahre],

4% $\quad \log n = 1{,}247\,311(0)$
$\quad n = 17{,}673\,0$ [etwa $17^2/_3$ Jahre].

Aufgabe 7

Es wird alljährlich zu Anfang des Jahres ein Betrag von 225 Mk. eingezahlt. Die Einlagen werden 20 Jahre hindurch mit 3¾% verzinst. Welcher Betrag ist nach 20 Jahren vorhanden? [Formel (6a)].

$e = 225$
$i = 0{,}0375$
$n = 20$

$\log(1+i) = 0{,}015\,9881(1)$
$n \cdot \log(1+i) = 0{,}319\,762(2)$
$(q^n - 1) = 1{,}08815$

$$\begin{array}{rrl}
\log(q^n-1) = & 0{,}036\,688(8) & \\
\log q = & 0{,}015\,988\,1 & \\
\hline
\text{Summe} = & 10{,}052\,676(9) & -10 \\
\log(q-1) = & 8{,}574\,031\,3 & -10 \\
\hline
\text{Diff.} = & 1{,}478\,645(6) & \\
\log e = & 2{,}352\,182\,5 & \\
\hline
\log c_n = & 3{,}830\,828\,(1) & \\
c_n = & 6773{,}73 \text{ Mk.} &
\end{array}$$

Anmerkung. Die Schlußwerte werden gewöhnlich zunächst für die Einheit berechnet und dann mit dem gegebenen Wert der betreffenden Größe multipliziert. Im vorliegenden Falle ergäbe sich nach der Formel ($6^{\underline{b}}$) für die Einheit der Einlage der Wert $r_{\overline{n|}} = 30{,}1055$. Wird diese Zahl dann numerisch mit 225 multipliziert, so ergibt sich ein Endkapital von 6773,74 Mark, also nur ein geringfügiger Abrundungsunterschied.

Aufgabe 8

Es will jemand bei einer Sparkasse, die 3¼ %ige Zinsen gewährt, im Zeitraum von 15 Jahren ein Kapital von 1500 Mk. ersparen. Wieviel hat er zu Anfang eines jeden Jahres einzulegen? [Formel (7)].

$c_n = 1500$
$i = 0{,}0325$
$n = 15$

$\log(1+i) = 0{,}013\,8900(6)$
$n \cdot \log(1+i) = 0{,}208\,3509$
$(q^n - 1) = 0{,}615\,66$

$$\begin{array}{rrl}
\log(q^n-1) = & 9{,}789\,340(9) & -10 \\
\log q = & 0{,}013\,890(1) & \\
\hline
\text{Summe} = & 9{,}803\,231\,(0) & -10 \\
\log(q-1) = & 8{,}511\,883(4) & -10 \\
\hline
\text{Diff.} = & 8{,}708\,652(4) & -10 \\
\log c_n = & 3{,}176\,091\,(3) & \\
\hline
\log e = & 1{,}884\,743(7) & \\
e = & 76{,}690(9) & [76{,}69 \text{ Mk.}]
\end{array}$$

Wird zunächst für die Einheit der Summe gerechnet, so ergibt sich der Numerus 0,051 1272. Man erhält dann für 1500 Mk. Endsumme ebenfalls eine Jahresprämie von 76,69 Mk.

Aufgabe 9

Es zahlt jemand alljährlich zu Anfang des Jahres 80 Mk. ein. Nach 30 Jahren steht für ihn mit den Zinsen und Zinseszinsen ein Kapital von 4000 Mk. zur Verfügung. Zu welchem Satz sind die Einlagen verzinst worden? [Formeln ($8^{\underline{a}}$) und ($8^{\underline{b}}$)].

$$e = 80$$
$$c_n = 4000$$
$$n = 30\,.$$

Schätzt man den Zinssatz zunächst auf 3%, setzt man also $i' = 0{,}03$ so erhält man nach der Formel (6) [wie in der Aufgabe 7]

$$c'_n = 3920{,}22\,.$$

Der Wert i' ist demnach etwas zu niedrig. Man setzt also $i'' = 0{,}035$. Dann erhält man in derselben Weise

$$c''_n = 4274{,}36\,.$$

Nunmehr ist:

$$i' = 0{,}030 \qquad i'' = 0{,}035$$
$$c'_n = 3920{,}22 \qquad c''_n = 4274{,}36$$

$$\delta = i'' - i' = 0{,}005$$
$$D = c''_n - c'_n = 354{,}14$$
$$d = c_n - c'_n = 79{,}78$$

$$\log d = 1{,}901\,8940$$
$$\log D = \underline{2{,}549\,1750}$$
$$\text{Diff.} = 9{,}352\,7190 - 10$$
$$\frac{d}{D} = 0{,}225\,278$$
$$\varDelta i = 0{,}0011\,2639 \qquad \underline{i = 0{,}0311\,264\,.}$$

Die Einlagen sind also verzinst zu einem Durchschnittssatze von 3,113%. Dieser Satz ist indes noch nicht genau, sondern nur ein Näherungssatz. Wollte man damit die Einlagen von 80 Mk. 30 Jahre hindurch aufzinsen, so erhielte man nur ein Kapital von 3997 Mk. Will man den Satz genauer bestimmen, so setzt man einen dritten Zinssatz i''' fest, den man statt des

Satzes i" verwendet. Man nimmt zum Beispiel an, es sei $i''' = 0{,}03125$. Dann hat man:

$$\begin{aligned} i' &= 0{,}03000 & \delta &= i''' - i' = 0{,}00125 \\ i''' &= 0{,}03125 & D &= c_n''' - c_n' = 85{,}20 \\ c' &= 3920{,}22 & d &= c_n - c_n' = 79{,}78 \\ c_n''' &= 4005{,}42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log d &= 1{,}901\,8940 \\ \log D &= 1{,}930\,4396 \\ \text{Diff.} &= 9{,}971\,4544 - 10 \\ \frac{d}{D} &= 0{,}936\,385 \\ \Delta i &= 0{,}001\,170(5) \qquad \underline{i = 0{,}03117.} \end{aligned}$$

Dieser Durchschnittszinssatz von 3,117 % ist praktisch schon sehr genau. Es ergibt sich damit eine Endsumme von 3999,90 Mk.

Aufgabe 10

Wieviel Jahre hindurch muß jemand zu Anfang eines jeden Jahres 200 Mk. einlegen, um bei 3½ %iger Verzinsung am Schlusse des letzten Einzahlungsjahres 4700 Mk. abheben zu können? [Formel ($9\frac{a}{}$)].

$$\begin{aligned} e &= 200 & i \cdot c_n &= 164{,}5 \\ c_n &= 4700 & (1+i) \cdot e &= 207{,}0 \\ i &= 0{,}035 & \text{Summe} &= 371{,}5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} && \log \text{Summe} &= 2{,}569\,9588 \\ \log(1+i) &= 0{,}014\,9403(5) & \log(1+i) \cdot e &= 2{,}315\,9703 \\ &= \text{Nenner} & \text{Zähler} &= 0{,}253\,9885 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{Zähler} &= 9{,}404\,8141 - 10 \\ \log \text{Nenner} &= 8{,}174\,3608 - 10 \\ \log n &= 1{,}230\,4533 \\ n &= 17{,}000(2) \qquad [17 \text{ Jahre}]. \end{aligned}$$

A n m e r k u n g. Man kann sich auch der Formel ($9\frac{b}{}$) bedienen. Diese Formel erscheint auf den ersten Blick

vielleicht sinnwidrig, da ja n die Unbekannte ist und somit $r_{\overline{n}|}$ nicht aus der Tafel entnommen werden kann. Es ist aber $c_n = r_{\overline{n}|} \cdot e$ und somit:

$$r_{\overline{n}|} = \frac{c_n}{e} ,$$

also in dem hier gegebenen Beispiel:

$$r_{\overline{n}|} = \frac{4700}{200} = 23{,}5 .$$

Es ist dann weiter:

$$\begin{aligned} i \cdot r_{\overline{n}|} &= 0{,}8225 \\ (1+i) &= 1{,}0350 \\ \hline \text{Summe} &= 1{,}8575 \\ \log \text{ Summe} &= 0{,}268\,9288 \\ \log\,(1+i) &= 0{,}014\,9403 \\ \text{Zähler} &= 0{,}253\,9885 . \end{aligned}$$

Die Rechnung geht dann weiter, wie vorher.

Übrigens führt die Formel ($9^{\underline{b}}$) ganz von selbst auf eine identische Gleichung. Es ist nämlich:

$$\log\left[i \cdot r_{\overline{n}|} + (1+i)\right] - \log(1+i) = \log\left[\frac{i}{1+i} \cdot r_{\overline{n}|} + 1\right]$$
$$= \log\left[\frac{q-1}{q} \cdot r_{\overline{n}|} + 1\right];$$

und man erhält dann mit Hilfe der Formel ($6^{\underline{b}}$)

$$n = \frac{\log q^n}{\log q} = n ,$$

was zu erwarten war.

Aufgabe 11

Eine Schuld von 120 000 Mk. soll im Zeitraum von 25 Jahren durch jährliche Tilgungsquoten abgetragen werden. Die Tilgungsquoten werden zu Anfang eines jeden Jahres entrichtet, sodaß die Schuld am Anfange des 25. Jahres mit der Zahlung der letzten Quote getilgt

wird. Wie hoch muß die Tilgungsquote bemessen sein, wenn mit 4%iger Verzinsung gerechnet wird? [Formel (10$\underline{b}$)].

$c = 120\,000$ $\quad (n-1) \cdot \log q = 0{,}408\,8002$

$i = 0{,}04$ $\quad n \cdot \log q = 0{,}425\,8335$

$n = 25$ $\quad (q^n-1) = 1{,}665\,84$

$\log q = 0{,}017\,0333(4)$

$$
\begin{aligned}
\log q^{n-1} &= 0{,}408\,8002 \\
\log i &= 8{,}602\,0600 - 10 \\
\hline
\text{Summe} &= 9{,}010\,8602 - 10 \\
\log (q^n - 1) &= 0{,}221\,6333 \\
\hline
\text{Diff.} &= 8{,}789\,2269 - 10 \\
\log c &= 5{,}079\,1812 \\
\hline
\log e &= 3{,}868\,4081 \\
e &= \underline{7385{,}98 \text{ Mk.}}
\end{aligned}
$$

Rechnet man zunächst für die Einheit der Summe, so findet man den Numerus 0,0615 498, den man, da die letzte Stelle infolge der Abrundungsfehler ohnehin nicht genau ist, auf 0,06155 abrunden kann. Man erhält dann als Tilgungsquote einen Betrag von 7386 Mk.

Anmerkung. Es empfiehlt sich stets, die Zahlen zunächst fürs Tausend der Summe anzugeben und dabei auf Pfennigbeträge abzurunden. Im vorliegenden Falle ergäbe sich da eine Tilgungsquote von $61{,}55\,^0/_{00}$, die dann für eine Schuld von 120 000 Mk. einfach mit 120 zu multiplizieren wäre.

Aufgabe 12

Eine Gemeinde will einen größeren Betrag für die Einrichtung von Neuerungen als Anleihe aufnehmen. Die Anleihe soll zu $3^3/_4$% verzinst und in 30 Jahren getilgt werden. Die vorschüssige Tilgungsquote darf etwa 36 000 Mk. ausmachen. Welches Kapital kann auf diesem Wege flüssig gemacht werden? [Formel (11)].

$$e = 36\,000 \quad i = 0{,}0375 \quad n = 30$$

$$\log q = 0{,}015\,9881(1)$$
$$(n-1)\cdot\log q = 0{,}463\,6552$$
$$n\cdot\log q = 0{,}479\,6433$$
$$(q^n - 1) = 2{,}017\,47$$

$$\begin{aligned}
\log q^{n-1} &= 0{,}463\,6552 \\
\log i &= 8{,}574\,0313 - 10 \\
\text{Summe} &= 9{,}037\,6865 - 10 \\
\log(q^n - 1) &= 10{,}304\,8071 - 10 \\
\text{Diff.} &= 1{,}267\,1206 \\
\log e &= 4{,}556\,3025 \\
\log c &= 5{,}823\,4231 \\
c &= 665\,922 \text{ Mk.}
\end{aligned}$$

Es kann also ein Kapital von 666 000 Mk. flüssig gemacht werden. Die genaue Tilgungsquote hätte dann 36 004,20 Mk. auszumachen. Vielfach wird jedoch auf derartige geringfügige Unterschiede einfach verzichtet. Man könnte dann also ganz gut die Tilgungsquote von 36 000 Mk. bestehen lassen, auch wenn man die Schuld von 665 921 Mk. auf 666 000 Mk. erhöht. Die Verzinsung bleibt dann um einen kaum merklichen Betrag hinter der $3^3/_4$ %igen Verzinsung zurück.

Aufgabe 13

Eine Gemeinde legt eine Anleihe von 900 000 Mk. auf, die in vorschüssigen Jahresquoten von 50 000 Mk. getilgt werden soll. Nach wieviel Jahren ist die Anleihe getilgt, wenn mit 4%iger Verzinsung gerechnet wird? [Formel ($12\underline{b}$)].

$$c = 900\,000 \quad i = 0{,}04 \quad e = 50\,000$$

$$d = \frac{i}{1+i} = 0{,}0\overline{384\,615}\ldots$$
$$dc = 34\,615,\overline{384\,615}\ldots\ldots$$

$$\begin{aligned}
e &= 50\,000{,}00 \\
dc &= 34\,615{,}38 \\
\text{Diff.} &= 15\,384{,}62
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log e &= 4{,}698\,9700 \\
\log[e - dc] &= 4{,}187\,0867 \\
\text{Diff.} &= 0{,}511\,8833 = \text{Zähler} \\
\log \text{Zähler} &= 9{,}709\,171(0) - 10 \\
\log \text{Nenner} &= 8{,}231\,299(8) - 10 \\
\log n &= 1{,}477\,871(2) \\
n &= 30{,}051(8).
\end{aligned}$$

Die Tilgungsquote ist also 30 Jahre hindurch zu entrichten. Der Bruchteil des 31. Jahres, der etwas mehr als einen halben Monat (etwa 19 Tage) ausmacht, kann vernachlässigt werden. Es wird dann einfach eine Verzinsung vorausgesetzt, die um ein geringes hinter der 4%igen Verzinsung zurückbleibt. Der Bruchteil kann aber auch berücksichtigt werden, indem für das letzte Jahr eine etwas höhere Tilgungsquote (eine Restquote) gezahlt wird, die sich auf den Zeitraum von 1,051(8) Jahren erstreckt. Die letzte Quote wird dann also auf 52 590 Mark, oder wenn der Wert $n = 30{,}052$ benutzt wird, auf 52 600 Mk. festgesetzt werden. Es könnte sogar berücksichtigt werden, daß der Mehrbetrag von 2590 Mk. (oder 2600 Mk.) erst am Anfang des 31. Jahres fällig wäre; es könnte dieser Betrag also für ein Jahr diskontiert werden, worauf in der Praxis allerdings meist verzichtet werden wird.

Aufgabe 14

Es zahlt jemand am 1. April jedes Jahres bei einer Sparkasse eine von Jahr zu Jahr steigende Einlage ein. Die Einlage des ersten Jahres beträgt 250 Mk. Sie soll alljährlich um 25 Mk. steigen, und die Einlegung soll solange fortgesetzt werden, bis die Summe der geleisteten Einlagen ohne Zinsen den Betrag von 7000 Mk. erreicht. Vom Tage der letzten Einlegung an soll das Kapital dann noch 5 Jahre hindurch auf Zinsen stehen bleiben. Wieviel Jahre hindurch sind Einlagen zu leisten und zu welchem Betrage wächst das Kapital an, wenn die Sparkasse dauernd $3\frac{1}{4}$%ige Zinsen gewährt? [Formeln ($13^{\underline{a}}$) und (2)].

$$e^{<} = 250$$
$$\varepsilon = 0{,}1$$
$$e^{<} + (1+\varepsilon)e^{<} + (1+2\varepsilon)e^{<} + \ldots + (1+\overline{n-1}\,\varepsilon)\,e^{<} = 7000,$$
$$1 + (1+\varepsilon) + (1+2\varepsilon) + \ldots + (1+\overline{n-1}\,\varepsilon) = \frac{7000}{e^{<}} = 28,$$
$$n + \frac{(n-1)\,n}{2}\,\varepsilon = 28.$$

Anmerkung. Hier sei erwähnt, daß man bekanntlich die Summe aller ganzen Zahlen von 1 bis z in der Weise bildet, daß man die letzte Zahl (z) mit der nächstfolgenden (z + 1) multipliziert und von dem Produkt die Hälfte nimmt. Es gilt also die Formel:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + z = \frac{1}{2}\,z\,(z+1).$$

Im vorliegenden Fall ist somit

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) = \frac{1}{2}\,(n-1)\,n.$$

Weiter ist dann:

$$2n + n^2\varepsilon - n\varepsilon = 56,$$
$$n^2\varepsilon + n\,(2-\varepsilon) = 56,$$
$$0{,}1\,n^2 + 1{,}9\,n = 56,$$
$$n^2 + 19\,n = 560,$$
$$n = -\frac{19}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{361 + 2240},$$
$$n = -\frac{19}{2} + \frac{51}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

Die negative Lösung $n = -\frac{19}{2} - \frac{51}{2} = -\frac{70}{2} = -35$ ist bedeutungslos. Uebrigens kann der Wert $n = 16$ auch leicht durch sogenanntes „Probieren“ gefunden werden.

$$n = 16 \qquad e = 250 \qquad \varepsilon = 0{,}1 \qquad i = 0{,}0325$$

$$\log q = 0{,}013\,8900(6)$$
$$n \cdot \log q = 0{,}222\,2409(6)$$
$$(q^n - 1) = 0{,}668\,173$$
$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 20{,}559\,1(7)$$
$$\left(\frac{q^n - 1}{q - 1} - n\right) = 4{,}559\,1(7) = h$$

$$\varepsilon \cdot h = 0{,}455\,91(7)$$
$$(q^n - 1) = 0{,}668\,17(3)$$
$$\text{Summe} = 1{,}124\,09(0)$$
$$\log \text{Summe} = 0{,}050\,801(0)$$
$$\log \frac{1}{d} = 1{,}502\,006(6)$$
$$\log e^{<} = 2{,}397\,940(0)$$
$$\log e_n^{<} = 3{,}950\,747(6)$$
$$\underline{c_n^{<} = 8927{,}86 \text{ Mk.}} = k_0 .$$

Für die weitere Berechnung:

$$k_0 = 8927{,}86 \qquad i = 0{,}0325 \qquad t = 4$$

[Nicht: $t = 5$! Denn das eine Jahr der Verzinsung zählt noch zu der Periode $n = 16$.]

$$\log (1 + i) = 0{,}013\,8900(6)$$
$$t \cdot \log (1 + i) = 0{,}055\,560(2)$$
$$\log k_0 = 3{,}950\,747(6)$$
$$\log k_t = 4{,}006\,307(8)$$
$$\underline{k_t = 10\,146{,}30 \text{ Mk.}}$$

Aufgabe 15

Eine Gemeinde trifft mit einem Bankhause folgendes Abkommen: Das Bankhaus zahlt der Gemeinde drei Jahre hindurch je 150 000 Mk. Die Schuld wird mit 5% verzinst und bleibt solange stehen, bis im ganzen 10 Jahre vergangen sind. Alsdann wird die Schuld in Jahresquoten getilgt, die alljährlich um 5% der ersten Quote abnehmen sollen. Mit der 20. Tilgungsquote soll die Schuld völlig getilgt werden. Vom Beginn der Tilgung an wird der Zinssatz auf 4½% ermäßigt. Wie groß ist, vom Beginn an gerechnet, die Schuld nach 10 Jahren? Wie groß ist die erste Tilgungsquote? Was ist insgesamt an Tilgungsquoten einzuzahlen? [Formeln ($6^{\underline{a}}$), (2) und ($14^{\underline{b}}$)].

$$e = 150\,000 \qquad i = 0{,}05 \qquad n = 3$$

$$\log\ q = 0{,}021\,1893(0)$$

$$n \cdot \log\ q = 0{,}063\,5679$$

$$(q^n - 1) = 0{,}157\,625$$

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 3{,}1525 = h$$

$$q \cdot h = 3{,}310\,125$$

$$c_n = \underline{496\,518{,}75\ \text{Mk.}} = k_0\,.$$

[In der Praxis: 496 519 Mk.]

Für die weitere Berechnung:

$$k_0 = 496\,518{,}75 \qquad i = 0{,}05 \qquad t = 7$$

$$\log\ k_0 = 5{,}695\,9357$$

$$t \cdot \log\ (1 + i) = 0{,}148\,3251$$

$$\log\ k_n = 5{,}844\,2608$$

$$\underline{k_n = 698\,652\ \text{Mk.}} = c\,.$$

Die Berechnung des Zwischenwertes k_0 kann umgangen werden, indem die Formeln (2) und ($6^{\underline{a}}$) mit einander kombiniert werden. Es ist dann:

$$c = q^{t+1} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot e\,.$$

$$\log \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0{,}498\,6551$$

$$\log q^{t+1} = 0{,}169\,5144$$

$$\log e = 5{,}176\,0913$$

$$\log c = 5{,}844\,2608\,.$$

Die Schuld ist also nach 10 Jahren angewachsen auf den Betrag von 698 652 Mk.

Für die weitere Berechnung:

$$c = 698\,652 \qquad i = 0{,}045 \qquad \varepsilon = 0{,}05 \qquad m = 20\,.$$

[Es empfiehlt sich, mit dem Symbol zu wechseln, um Irrtümer möglichst zu vermeiden].

$$\log\ q = 0{,}019\,1162(9)$$

$$m \cdot \log\ q = 0{,}382\,3258$$

$$(q^m - 1) = 1{,}411\,714\,.$$

$$\frac{q^m - 1}{q - 1} = 31{,}3714(2)$$

$$m = 20{,}0000\,0$$

$$\left(\frac{q^m - 1}{q - 1} - m\right) = 11{,}3714(2) = h$$

$$\varepsilon \cdot h = 0{,}568\,57(1)$$

$$(q^m - 1) = 1{,}411\,714$$

$$\text{Diff.} = 0{,}843\,14(3) = h'$$

$$\log q^{m-1} = 0{,}363\,2095$$

$$\log i = 8{,}653\,2125 - 10$$

$$\log c = 5{,}844\,2608$$

$$\text{Summe} = 14{,}860\,6828 - 10$$

$$\log h' = 9{,}925\,9012 - 10$$

$$\log e^{>} = 4{,}934\,7816$$

$$\underline{e^{>} = 86\,056{,}10\ \text{Mk.}}$$

In der Praxis wird man die erste Tilgungsquote auf 86 060 Mk. festsetzen und sie dann von Jahr zu Jahr um je 4303 Mk. ermäßigen. Man hat damit den Zinssatz um einen geringfügigen, praktisch bedeutungslosen Betrag erhöht. Weiter ist dann:

$$\varepsilon = 0{,}05 \qquad \mathrm{e}^{>} = 86060$$
$$\mathrm{m} = 20$$
$$S = \text{Gesamtleistung}$$
$$S = 20 \cdot \mathrm{e}^{>} - \frac{19 \cdot 20}{2} \cdot \varepsilon \cdot \mathrm{e}^{>}$$
$$S = 10.5 \cdot \mathrm{e}^{>}$$
$$\underline{S = 903630 \text{ Mk.}}$$

Da es sich um die Summe einer gleichmäßig verlaufenden arithmetischen Reihe erster Ordnung handelt, kann man die Gesamtleistung auch mit Hilfe der Formel

$$S = \frac{\mathrm{m}}{2}(a + \mathrm{z})$$

bestimmen, wobei mit a das Anfangsglied, mit z das letzte Glied der Reihe bezeichnet ist.

$$a = 86060 \quad (100\,\%) \qquad \frac{\mathrm{m}}{2} = 10$$
$$\mathrm{z} = 4303 \quad (5\,\%)$$
$$S = 10 \cdot [86060 + 4303]$$
$$\underline{S = 903630 \text{ Mk.}}$$

A n m e r k u n g. Die Aufgaben können mit den Formeln des 3. Kapitels nachgerechnet werden. Die fernerhin verwendeten Barwerte und Endwerte sind aus den am Schlusse des Buches gegebenen Tafeln entnommen.

Aufgabe 16

Welche Nettoeinlage ist für eine Sparversicherung zu zahlen, wenn als Gegenleistung nach 15 Jahren ein Kapital von 5000 Mk. ausgezahlt werden soll? Welches

Guthaben ist nach 10 Jahren vorhanden? Diskontsatz: $3\frac{1}{2}\%$. [Formeln (17) und (20)].

$$n = 15$$
$$v^n = 0{,}596\,891\,.$$

Fürs Tausend der Summe ist eine Einlage von 596,89 erforderlich, für 5000 Mk. mithin eine Einlage von 2984,45 Mk.

Will man daraus eine Bruttoeinlage berechnen, so ergibt sich, beispielsweise bei einem Aufschlage von 3%, für die Einheit ein Bruttowert von 0,61480. Man wird also eine einmalige Einlage von 615 fürs Tausend, für 5000 Mk. Versicherungssumme also eine Einlage von 3075 Mk. fordern.

Das Guthaben ist aus der Nettoeinlage zu berechnen.

$$m = 10 \qquad v^n = 0{,}596\,891$$
$$(1+i)^m = 1{,}410\,599$$

$$\log v^n = 9{,}775\,8947 - 10$$
$$\log (1+i)^m = 0{,}149\,4036$$
$$\log {}_mG_{\overline{n|}} = 9{,}925\,2983 - 10$$

$${}_mG_{\overline{n|}} = 0{,}841\,973\,.$$

Das Ergebnis stimmt überein mit dem Wert $v^{n-m} = v^5$. Für 5000 Mk. Summe ergibt sich also angenähert ein Guthaben von 4210 Mk.

Aufgabe 17

Es will jemand 20 Jahre hindurch in einer Sparversicherung jährlich 360 Mark einzahlen. Welches Kapital kann er nach 20 Jahren erhalten, wenn die Versicherungsgesellschaft 5% der Bruttoeinlage für Verwaltungskosten verausgabt? Welches Guthaben steht am Schlusse des 10. Versicherungsjahres zur Verfügung? Diskontsatz: $3\frac{1}{2}\%$. [Formeln (18) und (21)].

$$n = 20$$
$$r_{\overline{n|}} = 29{,}269\,471$$
$$\log r_{\overline{n|}} = 1{,}466\,4148$$
$$\log P_{\overline{n|}} = \log \frac{1}{r_{\overline{n|}}} = 8{,}533\,5852 - 10$$
$$P_{\overline{n|}} = 0{,}034\,1653\,.$$

Die Nettojahreseinlage beläuft sich also auf 34,16 Mk. bis 34,17 Mk. für 1000 Mk. Versicherungssumme. Die Gesellschaft rechnet nun mit einem Aufschlage von 5% der Bruttoprämie [nicht der Nettoprämie]. Es sei die Bruttoprämie mit X bezeichnet! Dann ist also:

$$X = P_{\overline{n|}} + 0{,}05\,X\,,$$
$$X = \frac{P_{\overline{n|}}}{0{,}95} = \frac{0{,}034\,1653}{0{,}95} = 0{,}035\,9635\,.$$

Da die Prämien gewöhnlich auf Beträge von 5 oder 10 Pfg. abgerundet werden, so wäre mit einer Prämie von 36.— $^0/_{00}$ zu rechnen. Für eine Jahresprämie von 360 Mk. kann also gerade genau ein Sparkapital von 10 000 Mk. versichert werden.

Man kann auch folgendermaßen rechnen:

Der Versicherte zahlt jährlich 360 Mk. ein. Davon verbraucht die Gesellschaft 5% für Verwaltungskosten. Es bleiben also netto noch 342 Mk. übrig. Die Nettojahresprämie beläuft sich auf 34,1653 $^0/_{00}$. Also ergibt sich ein Kapital von 10 010 Mk., das in der Praxis dann wohl auf 10 000 Mk. abgerundet werden wird.

Das Guthaben ist aus der Nettoeinlage zu berechnen.

$m = 10$

$$r_{\overline{m|}} = 12{,}141\,992$$
$$\log r_{\overline{m|}} = 1{,}084\,2898$$
$$\log P_{\overline{n|}} = 8{,}533\,5852 - 10$$
$$\log {}_m g_{\overline{n|}} = 9{,}617\,8750 - 10$$
$${}_m g_{\overline{n|}} = 0{,}414\,835\,.$$

Nach 10 Jahren ist also vorhanden ein Guthaben von 4148,35 Mk. Eingezahlt sind bis dahin brutto 3600 Mk., netto 3416,53 Mk.

Die Nettoprämie wird meist aus der Nettoeinlage berechnet.

$$v^n = A_{\overline{n|}} = 0{,}502\,566$$
$$a_{\overline{n|}} = 14{,}709\,837$$
$$\log A_{\overline{n|}} = 9{,}701\,1931 - 10$$
$$\log a_{\overline{n|}} = 1{,}167\,6079$$
$$\log P_{\overline{n|}} = 8{,}533\,5852 - 10$$
$$\underline{P_{\overline{n|}} = 34{,}1653\ {}^0/_{00}.}$$

Zur Berechnung des Guthabens eignet sich noch besonders die Formel

$$_m g_{\overline{n|}} = \frac{r_{\overline{m|}}}{r_{\overline{n|}}}.$$

Es ist dann:

$$r_{\overline{m|}} = 12{,}141\,992$$
$$r_{\overline{n|}} = 29{,}269\,471$$
$$\log r_{\overline{m|}} = 1{,}084\,2898$$
$$\log r_{\overline{n|}} = 1{,}466\,4148$$
$$\log {}_m g_{\overline{n|}} = 9{,}617\,8750 - 10$$
$$\underline{{}_m g_{\overline{n|}} = 414{,}835\ {}^0/_{00}.}$$

Aufgabe 18

Ein Vater will für seine beiden Töchter, von denen die eine 3, die andere 5 Jahre alt ist, je eine Summe von 5000 Mk. als Ausstattungskapital sicherstellen. Die Kapitalien sollen mit dem 21. Lebensjahre der Töchter fällig werden; es sollen jedoch nur 5 Jahre hindurch Prämien gezahlt werden. Die Gesellschaft erhebt zur Nettoeinlage einen Zuschlag von $4\frac{1}{2}\%$. Für den Fall, daß die versicherte Person während der Versicherungsdauer stirbt, sehen die Versicherungsbedingungen die Erstattung des vollen Guthabens vor. Es sei nun angenommen, die jüngere Tochter sterbe nach 2 Jahren, die ältere nach 10 Jahren. Welches sind die Netto-

einlagen, welches die Bruttoeinlagen, und welche Beträge sind beim Ableben der Versicherten zurückzuzahlen? Diskontsatz: $3\frac{1}{2}\%$. [Formeln (19) und (22)].

Für die ältere Tochter (I) ist eine Versicherung auf 16 Jahre, für die jüngere (II) eine solche auf 18 Jahre abzuschließen.

I. $\qquad n = 16, \qquad t = 5, \qquad m = 10,$

$$v^n = 0{,}576\,706$$
$$a_{\overline{t|}} = 4{,}673\,079$$

$$\log v^n = 9{,}760\,9545 - 10$$
$$\log a_{\overline{t|}} = 0{,}669\,6031$$
$$\log {}_tP_{\overline{n|}} = 9{,}091\,3514 - 10$$
$${}_tP_{\overline{n|}} = 0{,}123\,410(3)\,.$$

Die Nettoeinlage macht jährlich $123{,}41\,^0/_{00}$ aus.

$$1{,}045 \cdot {}_tP_{\overline{n|}} = 0{,}128\,963(8)\,.$$

Es ergibt sich eine Bruttoeinlage von jährlich $129.{-}\,^0/_{00}$. Für 5000 Mk. Kapital sind also 5 Jahre hindurch je 645 Mk., im ganzen mithin 3225 Mk. einzuzahlen.

Stirbt die ältere Tochter nach 10 Jahren, so ist die Versicherung schon seit 5 Jahren prämienfrei. Es ist also:

$${}_{m|t}g_{\overline{n|}} = v^{n-m} = v^6 = 0{,}813\,501\,,$$
$${}_{m|t}g_{\overline{n|}} = 813{,}50\,^0/_{00}\,.$$

Es ist mithin ein Betrag von 4067.50 Mk. zu erstatten.

II. $\qquad n = 18, \qquad t = 5, \qquad m = 2,$

$$v^n = 0{,}538\,361$$
$$a_{\overline{t|}} = 4{,}673\,079$$

$$\log v^n = 9{,}731\,0736 - 10$$
$$\log a_{\overline{t|}} = 0{,}669\,6031$$
$$\log {}_tP_{\overline{n|}} = 9{,}061\,4705 - 10$$
$${}_tP_{\overline{n|}} = 0{,}115\,204(8)\,.$$

Die Nettoeinlage macht $115{,}20\,^0/_{00}$ aus.

$$1{,}045 \cdot {}_tP_{\overline{n|}} = 0{,}120\,389(0)\,.$$

Es ergibt sich eine Bruttoeinlage von 120,40 $^0/_{00}$. Für 5000 Mk. Kapital sind also 5 Jahre hindurch je 602 Mk., im ganzen mithin 3010 Mk. einzuzahlen.

Stirbt die jüngere Tochter nach 2 Jahren, so ist das Guthaben gleich dem Betrage von 2 Nettoeinlagen unter Einrechnung $3^1/_2$%iger Zinsen und Zinseszinsen.

$$r_{\overline{m}|} = 2{,}106\,225$$

$$\begin{aligned} \log r_{\overline{m}|} &= 0{,}323\,5048 \\ \log {}_tP_{\overline{n}|} &= 9{,}061\,4705 - 10 \\ \hline \log {}_{m|t}g_{\overline{n}|} &= 9{,}384\,9753 - 10 \\ {}_{m|t}g_{\overline{n}|} &= 0{,}242\,647 \\ {}_{m|t}g_{\overline{n}|} &= 242{,}65\,^0/_{00}. \end{aligned}$$

Es ist mithin ein Betrag von 1213,25 Mk. zu erstatten.

Hier kann man auch einfach folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned} {}_tP_{\overline{n}|} &= 115{,}20(5)\,^0/_{00} \\ 0{,}035 \cdot {}_tP_{\overline{n}|} &= \underline{\quad 4{,}03(2)\,^0/_{00}} \\ 1.\ \text{Summe} &= 119{,}23(7)\,^0/_{00} \\ {}_tP_{\overline{n}|} &= \underline{115{,}20(5)\,^0/_{00}} \\ 2.\ \text{Summe} &= 234{,}44(2)\,^0/_{00} = h \\ 0{,}035 \cdot h &= \underline{\quad 8{,}20(5)\,^0/_{00}} \\ {}_{m|t}g_{\overline{n}|} &= 242{,}64(7)\,^0/_{00} \quad [\text{abgekürzt: } \underline{242{,}65\,^0/_{00}}]\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 19

Für die jüngere Tochter ist das Guthaben der Aufgabe 18 mit Hilfe der Barwerte zu berechnen. [Formel (28)].

Es ist in diesem Falle:

$$\begin{aligned} {}_{2|5}g_{\overline{18}|} &= A_{\overline{16}|} - {}_5P_{\overline{18}|} \cdot a_{\overline{3}|}\,, \\ A_{\overline{n-m}|} &= v^{n-m} = 0{,}576\,706\,, \\ {}_tP_{\overline{n}|} &= 0{,}115\,204(8)\,, \end{aligned}$$

wie in der Aufgabe 18 berechnet, und:

$$a_{\overline{t-m}|} = 2{,}899\,694\,.$$

Es ergibt sich dann:

$$\log {}_tP_{\overline{n}|} = 9{,}061\,4706 - 10$$
$$\log a_{\overline{t-m}|} = 0{,}462\,3522$$
$$\text{Summe} = 9{,}523\,8228 - 10$$
$${}_tP_{\overline{n}|} \cdot a_{\overline{t-m}|} = 0{,}334\,059$$
$$A_{\overline{n-m}|} = 0{,}576\,706$$
$${}_{m|t}g_{\overline{n}|} = 0{,}242\,647\,.$$

Auch hier ergibt sich also ein Guthaben von 242,65 ‰.

Aufgabe 20

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist darauf zu rechnen, daß ein 50jähriger nach 1 Jahre noch am Leben sein wird, während ein 40jähriger inzwischen gestorben ist? [Erläuterungen des 6. Kapitels].*)

$$p_{50} = 0{,}981\,8602$$
$$q_{40} = 0{,}011\,7643$$
$$p_{50} \cdot q_{40} = 0{,}011\,5509\,.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist 0,01155 $\left(\text{etwa } \frac{7}{600}\right)$.

Aufgabe 21

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist zu erwarten, daß ein 20jähriger und ein 30jähriger nach 25 Jahren beide noch am Leben sein werden? [Erläuterungen des 6. Kapitels].

$$l_{20} = 100\,000 \qquad l_{30} = 91\,578$$
$$l_{45} = 77\,707 \qquad l_{55} = 64\,695$$
$${}_{25}p_{20} = 0{,}77\,707 \qquad {}_{25}p_{30} = 0{,}70\,645$$
$${}_{25}p_{20} \cdot {}_{25}p_{30} = 0{,}54\,896\,.$$

*) Den folgenden Berechnungen sind die Grundwerte und die aus ihnen hergeleiteten Barwerte nach der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften zugrunde gelegt, die im Auszug in den am Schlusse des Buches gegebenen Tafeln enthalten sind.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist etwas größer als $\frac{1}{2}$; es ist also mit etwas größerer Wahrscheinlichkeit darauf zu rechnen, daß beide Personen noch am Leben sein werden, als daß das nicht der Fall sein wird.

Aufgabe 22

Welches ist die wahrscheinlichste und welches die mittlere Lebensdauer eines 70jährigen? [Formeln (37) und (38)].

I.

$$l_{70} = 33\,701$$
$$\frac{1}{2} l_{70} = 16\,850{,}5$$
$$l_{77} = 17\,083$$
$$l_{78} = 14\,980$$
$$\text{Diff.} = \quad 2\,103 = D$$

Die wahrscheinlichste Lebensdauer muß etwas größer sein als 7 Jahre. Man kann den genaueren Wert bestimmen, indem man linear interpoliert.

$$l_{77} = 17\,083$$
$$\frac{1}{2} l_{70} = 16\,850{,}5$$
$$\text{Diff.} = \quad 232{,}5 = d$$

$$\delta = \frac{d}{D} = \frac{232{,}5}{2103} = 0{,}111\ \ldots$$

Die lineare Interpolation ergibt noch eine weitere Dauer von $\frac{1}{9}$ Jahr.

Man kann also insgesamt eine Dauer von 7 Jahren und 40 Tagen angeben.

II. $$l_{70} + l_{71} + l_{72} + \ldots\ldots + l_{89} = \Sigma l_{70} = 282\,750,$$

$$l_{70} = 33\,701$$

$$\overset{\circ}{e}_{70} = \frac{\Sigma l_{70}}{l_{70}} = \frac{282750}{33701} = 8{,}39\,,$$

$$e_{70} = 7{,}89\,.$$

Die (gekürzte) mittlere Lebensdauer des 70jährigen beläuft sich auf 7 Jahre 325 Tage.

Anmerkung. In den meisten Altersklassen ist der relative Unterschied zwischen der mittleren und der wahrscheinlichsten Lebensdauer nicht so groß wie in dem hier gewählten Beispiel. Übrigens ist die numerische Rechnung nicht ganz streng, weil die Werte l_x nur bis l_{89} summiert sind; doch ist der Fehler praktisch bedeutungslos.

Aufgabe 23

Ein 38jähriger geht eine Versicherung auf den Lebensfall ein. Das versicherte Kapital von 5000 Mk. soll nur fällig werden, wenn der Versicherte nach 17 Jahren noch am Leben ist. Stirbt der Versicherte vorher, so soll die für die Versicherung geleistete einmalige Einlage verfallen sein. Wie hoch ist die einmalige Nettoeinlage (der Barwert der Versicherung), und welcher Betrag ist als Einkaufssumme zu entrichten, wenn die Versicherung nur als Zusatzversicherung, oder wenn sie als Grundversicherung gedacht ist? [Formel (39c)].

$$D_{55} = 9753{,}295$$
$$D_{38} = 22931{,}74$$
$${}_{17}E_{38} = 0{,}425319\,.$$

Die einmalige Nettoeinlage macht für die Einheit der Summe den Betrag 0,425319 aus. Es wäre also ein Barwert von 425,32‰ festzusetzen. Für 5000 Mk. Summe ergibt sich dann eine Nettoeinlage von 2126,60 Mk.

$$1{,}05 \cdot {}_{17}E_{38} = 0{,}446\,585 \qquad \underline{[446{,}60\,‰]}\,.$$

Wird die Versicherung als Zusatzversicherung abgeschlossen, so kann eine einmalige Zusatzprämie von 2233 Mk. als ausreichend angesehen werden.

$$1{,}10 \cdot {}_{17}E_{38} = 0{,}467\,851 \qquad \underline{[468\,‰]}\,.$$

Wird die Versicherung also als selbständige Versicherung (als Grundversicherung) abgeschlossen, so kann eine Kaufsumme von 2340 Mk. als angemessen gelten.

Aufgabe 24

Ein 22jähriger, der eine Todesfallversicherung mit 43jähriger Dauer abschließt, will als Zusatzversicherung eine Versicherung auf den Lebensfall eingehen und dafür einmalig einen Betrag von 500 Mk. aufwenden. Welche Summe kann ihm dafür als „Bonifikation" ausgezahlt werden, wenn er das 65. Lebensjahr erreicht hat, wenn also die Todesfallversicherung abläuft? [Formel ($39\underline{c}$)].

$$D_{65} = 4\,855{,}879$$
$$D_{22} = 46\,057{,}92$$
$${}_{43}E_{22} = 0{,}105\,430 \quad \underline{[105{,}43\ {}^0/_{00}]}$$
$$1{,}05 \cdot {}_{43}E_{22} = 0{,}110\,701 \quad \underline{[110{,}70\ {}^0/_{00}]}.$$

Einer Einlage von 110,70 Mk. entspricht eine Summe von 1000 Mk.; einer Einlage von 500 Mk. entspricht also eine Summe von 4516,71 Mk., wofür in der Praxis dann eine Summe von 4520 Mk. festgesetzt werden könnte.

Aufgabe 25

Ein 46jähriger geht eine reine Erlebensfallversicherung ein, aus der ihm, wenn er nach 15 Jahren noch am Leben sein sollte, ein Kapital von 10 000 Mk. ausgezahlt werden soll. Wie hoch hat sich die Nettoeinlage und wie hoch die Bruttoeinlage, die aus der Nettoeinlage mit einem Aufschlag von 10% zu rechnen ist, tatsächlich verzinst, wenn der Versicherte den Endtermin erlebt? [Formeln ($39\underline{c}$) und (4)].

$$D_{61} = 6\,612{,}355$$
$$D_{46} = 15\,736{,}79$$
$${}_{15}E_{46} = 0{,}420\,184 \quad \underline{[420{,}18\ {}^0/_{00}]}$$
$$1{,}10 \cdot {}_{15}E_{46} = 0{,}462\,202 \quad \underline{[462{,}20\ {}^0/_{00}]}.$$

Die Bruttoeinlage wäre für 10 000 Mk. Kapital auf 4622 Mk. festzusetzen, die Nettoeinlage auf 4201.80 Mk. oder genauer auf 4201.84 Mk.

Für die weitere Berechnung:

$$k_o = 4\,201{,}84 \qquad k_n = 10\,000 \qquad n = 15$$

$$\log k_n = 4{,}000\,0000$$
$$\log k_o = 3{,}623\,4396$$
$$\log \frac{k_n}{k_o} = 0{,}376\,5604$$
$$\frac{1}{15} \log \frac{k_n}{k_o} = 0{,}025\,104(0)$$
$$\sqrt[15]{\frac{k_n}{k_o}} = 1{,}059\,5(1)$$
$$\underline{i = 0{,}059\,5\,.}$$

Aus der Nettoeinlage ergibt sich eine Verzinsung von nahezu 6 %.

$$k_o = 4\,622 \qquad k_n = 10\,000 \qquad n = 15$$

$$\log k_n = 4{,}000\,0000$$
$$\log k_o = 3{,}664\,8299$$
$$\log \frac{k_n}{k_o} = 0{,}335\,1701$$
$$\frac{1}{15} \log \frac{k_n}{k_o} = 0{,}022\,344(7)$$
$$\sqrt[15]{\frac{k_n}{k_o}} = 1{,}052\,8(0)$$
$$\underline{i = 0{,}052\,8\,.}$$

Aus der Bruttoeinlage ergibt sich eine Verzinsung von etwa $5\frac{1}{4}$ %.

Aufgabe 26

Ein 66jähriger Mann schließt eine Rentenversicherung ab, die ihm alljährlich eine Rente von 2000 Mk. bringen soll, solange er am Leben bleibt. Die erste Rente ist nach 1 Jahr auszuzahlen. Welches ist der Nettobarwert und wie hoch ist die Rentenkaufsumme, wenn mit der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften (M. u. W. I, $3\frac{1}{2}$ %) gerechnet wird und infolgedessen die Nettoeinlage wie die Bruttoeinlage mit einem Sicherheitsaufschlag von $7\frac{1}{2}$ %, die Bruttoeinlage außerdem noch mit dem üblichen Unkostenaufschlag von 5 % versehen wird? [Formel (40$\underline{c}$)].

$N_{67} = 32\,549{,}183 \qquad 1{,}075 \cdot a_{66} = 7{,}84582(3)$
$D_{66} = 4\,459{,}744 \qquad 1{,}125 \cdot a_{66} = 8{,}21074(5).$
$a_{66} = 7{,}29\,844.$

Barwert (erhöht) : 7,846 für die Einheit,
Bruttoeinlage: 8,211 für die Einheit.

Wird die Bruttoeinlage für 100 Mk. Jahresrente auf volle Markbeträge abgerundet, so beläuft sie sich auf 821 %. Für 2000 Mk. Jahresrente ergibt sich dann eine Rentenkaufsumme von 16 420 Mk. Die Nettoeinlage macht zunächst nur etwa 14 597 Mk. aus, wäre aber vorsichtshalber auf etwa 15 691 Mk. zu erhöhen.

Aufgabe 27

Einer 54jährigen alleinstehenden Frau ist durch Erbschaft ein Vermögen von 40 000 Mk. zugefallen. Das Vermögen soll zum Ankauf einer Leibrente verwendet werden. Welche Rente kann versichert werden, wenn mit der Tafel M. u. W. I zum Diskont von 3½ % gerechnet und zur Nettokaufsumme ein Zuschlag von 20 % hinzugefügt wird? Wie hoch hat sich die Einlage verzinst, wenn die Versicherte stirbt, nachdem ihr gerade die 31. Rente ausgezahlt worden ist, nachdem sie also rechnungsmäßig gerade 85 Jahre alt geworden ist? Wie hoch stellt sich dagegen die Verzinsung, wenn die Rentnerin 10 Jahre früher stirbt? [Formeln ($40\underline{^c}$), ($10\underline{^a}$) und (8)].

$N_{55} = 115\,966{,}463$
$D_{54} = 10\,337{,}45$
$a_{54} = 11{,}2181$
$1{,}20 \cdot a_{54} = 13{,}4617.$

Die Kaufsumme ist auf 1346 % festzusetzen.

Der Rentensatz wird gewöhnlich auf Pfennigbeträge fürs Tausend der Einlage angegeben.

Im vorliegenden Fall ergibt sich dann ein Rentensatz von $74{,}30\,‰$. Für eine Einlage von 40 000 Mk. kann also eine Jahresrente von 2972 Mk. versichert werden.

Stirbt die Rentnerin am Anfang des 32. Versicherungsjahres, so hat sie subjektiv in 31 Jahren ihr Kapital von 40 000 Mk. aufgebraucht, indem sie alljährlich am Schlusse des Jahres 2972 Mk. davon abgehoben hat. Es liegt also dieselbe Art der Verzinsung vor, wie sie in der Amortisationsrechnung gebräuchlich ist. Zur Berechnung der Verzinsung ist mithin die Formel (10$\underline{^a}$) anzuwenden, wobei jedoch zu beachten ist, daß hier die Abtragungsquoten (die Renten) nachschüssig gezahlt werden. Es ist also:

$$cq^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot e\,.$$

$c = 40\,000$
$e = \ \ 2\,972$
$n = 31\,.$

Zunächst werde ein Versuch gemacht mit einer Verzinsung von 6 %!

Es sei also $i = 0{,}06.$

$$q' = 1{,}06$$
$$q'^n = 6{,}088\,10(2)$$
$$\frac{q'^n - 1}{q'^n \cdot (q' - 1)} = 13{,}9291 = h$$
$$c' = h \cdot e = 41\,397{,}30\,.$$

Der Wert c' übersteigt das tatsächlich eingezahlte Kapital noch erheblich; die Verzinsung ist also noch nicht genau genug eingeschätzt. Sie muß höher sein, weil in Wirklichkeit nur ein geringeres Kapital eingezahlt worden ist, weil also, da doch die Rente unverändert festliegt, aus diesem geringeren Kapital höhere Erträgnisse erzielt worden sind.

Es sei nun mit einem Zinssatz von 6¼ % gerechnet!

Dann ist:

$$i' = 0{,}0625$$
$$q' = 1{,}0625$$
$$q'^n = 6{,}549\,33(4)$$
$$\frac{q'^n - 1}{q'^n \cdot (q' - 1)} = 13{,}5570 = h$$
$$c' = h \cdot e = \underline{\underline{40\,291{,}40\,.}}$$

Nun ist die erste Annäherung genau genug. Der Satz i" läßt sich bequem zweckmäßig auswählen. Indem man nämlich den Zinssatz von 6% auf $6^1/_4$%, also um $^1/_4$% erhöht hat, hat man c' um etwa 1100 Mk. herabgedrückt. Erhöht man den Zinssatz weiter um $^1/_8$%, so wird c' weiter um etwas mehr als 500 Mk. verringert werden; damit wird c" dann kleiner als der tatsächlich gezahlte Kaufbetrag. Man setzt also:

$$i'' = 0{,}06375$$
$$q'' = 1{,}06375$$
$$q''^{n} = 6{,}792\,45(3)$$
$$\frac{q''^{n} - 1}{q''^{n} \cdot (q'' - 1)} = 13{,}3769 = h$$
$$c'' = h \cdot e = \underline{39\,756{,}10}\,.$$

Da die Verzinsung in dem hier gewählten Beispiel umgekehrt wirkt wie in der Rechnungsform, die für die Entwicklung der Formeln (8) zugrunde gelegt war, so ergibt sich:

$$i'' - i' = \delta = 0{,}001\,250$$
$$c'' - c' = D = -535{,}30$$
$$c - c' = d = -291{,}40$$
$$\frac{d}{D} = 0{,}5444$$
$$\Delta i = 0{,}000\,680$$
$$i' = 0{,}062\,500$$
$$i = 0{,}063\,180\,.$$

Es hat sich also nahezu eine Verzinsung von $6^1/_3$% ergeben.

Rechnet man mit dem Wert $i = 0{,}063180$ noch einmal durch, so erhält man $c_{\overline{n}|} = 39\,998{,}80$. Der genaue Wert $c_{\overline{n}|} = 40000$ ergibt sich für $i = 0{,}0631772$.

Stirbt die Rentnerin schon am Anfang des 22. Versicherungsjahres, so ist

$$c = 40\,000$$
$$e = 2\,972$$
$$n = 21\,.$$

Dann ersetzt man

$$cq^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot e$$

durch

$$c(1+i)^n = \frac{1}{q} \cdot r_{\overline{n}|} \cdot e$$

und hat weiter:

$$c(1+i)^{n+1} = r_{\overline{n}|} \cdot e\,,$$

$$c = \frac{r_{\overline{n}|}}{(1+i)^{n+1}} \cdot e = \varrho \cdot e\,.$$

Schätzt man den Zinssatz zunächst auf 4 %, so ergibt sich aus der Tafel ohne weiteres:

$$r_{\overline{n}|} = 33{,}247\,970$$
$$(1+i)^{n+1} = 2{,}369\,919$$
$$\varrho = 14{,}029\,16$$
$$\underline{c = 41{,}694{,}66\,.}$$

Dieser Betrag übersteigt die Kaufsumme von 40 000 Mark noch bedeutend. Man wird also mit dem Satz von 4¼ % weiter rechnen und demgemäß setzen:

$$i' = 0{,}0425$$
$$r'_{\overline{n}|} = 34{,}258\,018$$
$$(1+i')^{n+1} = 2{,}498\,466$$
$$\varrho' = 13{,}711\,62$$
$$\underline{c' = 40\,750{,}93\,.}$$

Dann ist weiter mit einem Zinssatz von 4½ % zu rechnen.

$$i'' = 0{,}0450$$
$$r''_{\overline{n}|} = 35{,}303\,378$$
$$(1+i'')^{n+1} = 2{,}633\,652$$
$$\varrho'' = 13{,}404\,72$$
$$\underline{c'' = 39\,838{,}83\,.}$$

Also ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
i'' - i' &= \delta = 0{,}002\,500 \\
c'' - c' &= D = -912{,}10 \\
c - c' &= d = -750{,}93 \\
\frac{d}{D} &= 0{,}8233 \\
\Delta i &= 0{,}000\,206 \\
i' &= 0{,}004\,250 \\
i &= \underline{0{,}004\,456}\,.
\end{aligned}
$$

Der Zinssatz liegt nur wenig unter dem Satz von $4\frac{1}{2}\,\%$.

Aufgabe 28

Eine Firma will einem 38jährigen Angestellten eine Alterspension sichern, die auf 4500 Mk. fürs Jahr festgesetzt werden soll. Die Altersrente soll mit dem 65. Lebensjahre des Angestellten beginnen und ganzjährig vorschüssig gezahlt werden. Die Firma will dafür eine einmalige Kaufsumme einzahlen. Wie hoch stellt sich diese Kaufsumme, wenn mit einem Aufschlag von $12\frac{1}{2}\,\%$ gerechnet wird? [Formel ($41\underline{^a}$)].

$$
\begin{aligned}
N_{65} &= 41\,864{,}806 \\
D_{38} &= 22\,931{,}74 \\
{}_{27|}a_{38} &= \;\;1{,}825\,63\,.
\end{aligned}
$$

Der Nettobarwert macht also noch nicht ganz das doppelte der Jahresrente aus. Berücksichtigt man dabei, daß ein Teil des Aufschlages als Sicherheitsaufschlag zu gelten hat, so wird man für die Nettorechnung den Wert

$$1{,}075 \cdot {}_{27|}a_{38} = 1{,}96255$$

zugrunde legen; man erhält dann also fast genau das doppelte der Rente 1. Weiter ist dann:

$$1{,}125 \cdot {}_{27|}a_{38} = 2{,}05383\,.$$

Es wird also eine Kaufsumme von 205,40 % festgesetzt werden, sodaß die Firma für eine Jahresrente von 4500 Mk. einen Betrag von 9243 Mk. als Kaufgeld einzuzahlen hat.

Aufgabe 29

Einer unverheirateten Dame von 44 Jahren steht von ihrem 55. Lebensjahre an testamentarisch eine Jahresrente zu, die dann zu Anfang eines jeden Jahres zu zahlen ist und 2400 Mk. im Jahr ausmacht. Die Dame will sich aus ihrem Vermögen eine Rente in derselben Höhe sichern, die sofort beginnen, aber nachschüssig zu zahlen sein soll. Diese Rente soll dann nach 11 Jahren durch die testamentarische Rente abgelöst werden. Was ist für die kurze Rente einzuzahlen, wenn mit einem Aufschlage von 5 % gerechnet wird? [Formel (43a)]

Die kurze Rente ist nachschüssig zu zahlen. Die Formel ist jedoch mit Vorsicht anzuwenden. Denn es sind im ganzen nur 10 Renten zu versichern, da am Schlusse des 11. Jahres keine Rente mehr fällig zu werden braucht. Dann wird nämlich die vorschüssig zu zahlende testamentarische Rente zum ersten Male fällig. Es ist also

$$|_{10}a_{44} = \frac{N_{45} - N_{55}}{D_{44}}.$$

Man gebe überhaupt stets darauf acht, daß die Indices des Zählers äußerlich kennzeichnen, wie oft eine Rente (oder auch eine Prämie) gezahlt werden soll. Man kann in diesem Sinne das Minuszeichen der Summenwerte N geradezu umdeuten und dafür das Wörtchen „bis“ lesen, also zum Beispiel: N_{45} bis N_{55}. Der Unterschied der Indices aber muß dann 10 ergeben, weil 10 Renten zu zahlen sind.

$$\begin{array}{rrl} & N_{45} = & 248\,898{,}01 \\ & N_{55} = & 115\,966{,}46 \\ \hline & \text{Diff.} = & 132\,931{,}55 \\ & D_{44} = & 17\,343{,}84 \\ & {}_{10|}a_{44} = & 7{,}664\,48 \\ 1{,}05 \cdot & {}_{10|}a_{44} = & 8{,}047\,70\,. \end{array}$$

Die Kaufsumme wäre auf 805 % festzusetzen, sodaß für 2400 Mk. Jahresrente ein Kapital von 19 320 Mk. einzuzahlen wäre.

Aufgabe 30

Wie ändert sich die Rechnung, wenn in dem vorigen Beispiel die 44jährige die einstweilen versicherte Rente nicht sofort beziehen will, sondern wenn die Rentenzahlung erst nach 5 Jahren beginnen soll? Wie hoch stellt sich dann die Kaufsumme? [Formel (46)].

Es handelt sich dann um eine Rente, die 5 Jahre aufgeschoben ist und die alsdann vorschüssig längstens 6 Jahre hindurch gezahlt werden soll.

$$\begin{array}{rrl} & N_{49} = & 187\,410{,}22 \\ & N_{55} = & 115\,966{,}46 \\ \hline & \text{Diff.} = & 71\,443{,}76 \\ & D_{44} = & 17\,343{,}84 \\ & {}_{5|6}a_{44} = & 4{,}119\,26 \\ 1{,}05 \cdot & {}_{5|6}a_{44} = & 4{,}325\,22\,. \end{array}$$

Die Kaufsumme ermäßigt sich auf 433 %, also auf 10 392 Mk. für eine Jahresrente von 2400 Mk.

Aufgabe 31

Auf das Leben eines 28jährigen soll eine Versicherung zur „natürlichen“ Prämie abgeschlossen werden. Die Versicherungssumme soll 15 000 Mk. ausmachen.

Welche Prämie ist zu zahlen, wenn mit einem Aufschlage von 25 % gerechnet wird? Welche Prämie ist ein Jahr später zu zahlen, wenn die Versicherung ebenfalls zur natürlichen Prämie fortgesetzt wird? [Formel (47 $\underline{a}$)].

$$q_{28} = 0{,}008\,5325$$
$$v = 0{,}966\,184$$
$$\Pi_{28} = 0{,}008\,2440$$
$$1{,}25 \cdot \Pi_{28} = 0{,}010\,305\,.$$

Die Prämie ist auf $\underline{10{,}30\,^0/_{00}}$ festzusetzen; sie beläuft sich also für $\underline{15\,000 \text{ Mk.}}$ Versicherungssumme auf 154,50 Mk. [Man beachte die Größenordnung der Prämie!]

$$q_{29} = 0{,}008\,6601$$
$$v = 0{,}966\,184$$
$$\Pi_{29} = 0{,}008\,3672(5)$$
$$1{,}25 \cdot \Pi_{29} = 0{,}010\,459\,.$$

Wird die Versicherung um ein Jahr verlängert, so ist für das zweite Jahr eine Prämie zum Satze von $\underline{10{,}50\,^0/_{00}}$, für 15 000 Mk. Summe also eine Prämie von $\underline{157{,}50 \text{ Mk.}}$ zu zahlen.

Aufgabe 32

Auf das Leben eines 30jährigen soll eine einfache Kapitalversicherung auf den Todesfall abgeschlossen werden. Die Versicherungssumme soll 25 000 Mk. ausmachen. Welchen Barwert wird die Versicherung am Schlusse des 15. Versicherungsjahres aufweisen, wenn sie zur einmaligen Prämie abgeschlossen worden ist? [Formel (48 $\underline{b}$)].

Der Barwert der Versicherung ist zu berechnen für das Alter von 45 Jahren.

$$M_{45} = 8\,108{,}2696$$
$$D_{45} = 16\,525{,}11$$
$$A_{45} = 0{,}490\,66(4)\,.$$

Die Versicherung weist einen Barwert von 12266,60 Mk. auf. Rechnet man zunächst fürs Tausend der Summe, so ergibt sich ein Barwert von 490,66 ‰. Dann erhält man für 25 000 Mk. den abgerundeten Betrag von 12 266,50 Mk.

Aufgabe 33

Zu der Versicherung eines 42jährigen wird eine Zusatzversicherung abgeschlossen, aus der dem Versicherungsnehmer vom Beginn des 14. Versicherungsjahres an eine „Freipolice" zusteht, die auf den Todesfall über den Betrag von 8000 Mk. lautet. Während der ersten 13 Jahre wird aus dieser Zusatzversicherung kein Wagnis getragen. Welchen Barwert weist die Zusatzversicherung im Zeitpunkte des Abschlusses auf? Wie erhöht sich der Barwert, wenn berücksichtigt werden soll, daß die Sterbfallsummen durchschnittlich in der Mitte des Jahres auszuzahlen sind? [Formeln (49) und (48c)].

Die Wirkung der prämienfreien Versicherung beginnt, wenn der Versicherte rechnungsmäßig 55 Jahre alt geworden ist.

$$M_{55} = 5\,831{,}7260$$
$$D_{42} = 19\,073{,}82$$
$${}_{13|}A_{42} = 0{,}305\,745\,.$$

Der Barwert beläuft sich auf 2445,96 Mk. oder auf 2446 Mk., wenn mit dem Satz von 305,75 ‰ gerechnet wird.

Wird der Barwert genauer berechnet, so ist:

$$\sqrt{1+i} = \sqrt{1{,}035} = 1{,}017\,35$$
$${}_{13|}A^0_{42} = 0{,}311\,050 \qquad 311{,}05\,‰\,.$$

Es ergibt sich dann als Barwert für die prämienfreie Summe von 8000 Mk. ein Betrag von 2488,40 Mk.

Es genügt auch die Annäherung:

$$1 + \frac{1}{2}\, i = 1{,}0175$$

$$_{13|}A^{0}_{42} = 0{,}311\,096 \qquad\qquad 311{,}10\,^0/_{00}\,.$$

Hiernach ergibt sich als Barwert ein Betrag von 2488,80 Mk.

Aufgabe 34

Ein 35jähriger Ingenieur soll von seiner Firma für die Dauer von 5 Jahren mit 20 000 Mk. auf den Todesfall versichert werden. Wenn die 5jährige Dauer abgelaufen ist, und wenn der Versicherte dann noch am Leben ist, sollen keinerlei Ansprüche mehr bestehen. Die Firma wünscht die Prämienzahlung auf einmal zu erledigen. Die Versicherungsgesellschaft schlägt vor, entweder eine Risikoversicherung auf 5 Jahre zur einmaligen Einlage abzuschließen oder die Versicherung zur „natürlichen" Prämie abzuschließen und die Prämien für 5 Jahre im voraus einzuzahlen. Im zweiten Falle sollen die vorausgezahlten Prämien zum Satze von 3½ % diskontiert werden. In beiden Fällen rechnet die Gesellschaft mit einem Aufschlage von 25 % zur Nettoprämie. Welche einmalige Prämie und welche Vorauszahlung wäre zu fordern? [Formeln ($50\underline{^b}$) und ($47\underline{^a}$)].

$$\begin{aligned} M_{35} &= 10\,515{,}0014 \\ M_{40} &= 9\,285{,}3656 \\ \hline \text{Diff.} &= 1\,229{,}6358 \\ D_{35} &= 26\,225{,}18 \\ {}_5A_{35} &= 0{,}046\,8876 \\ 1{,}25 \cdot {}_5A_{35} &= 0{,}058\,6095\,. \end{aligned}$$

Die einmalige Prämie wäre auf $58{,}60\,^0/_{00}$, also auf 1172 Mk. für 20 000 Mk. Kapital festzusetzen.

Um die Prämienvorauszahlung bestimmen zu können, muß man zunächst für die Alter von 35 bis 39 Jahren die natürliche Prämie berechnen.

	$x=35$	$x=36$	$x=37$	$x=38$	$x=39$
q_x	0,009 9858	0,010 2714	0,010 5765	0,010 9491	0,011 3327
Π_x	0,009 6481	0,009 9241	0,010 2188	0,010 5788	0,010 9495

Alter	Natürliche Prämie netto	Natürliche Prämie brutto	Vorauszahlungsdauer	Diskontierungsfaktor	Vorauszahlungsbetrag
x	Π_x	$1{,}25 \cdot \Pi_x$	m	v^m	
	‰	‰			‰
35 J.	9,648	12,10	0 J.	1,000 000	12,10
36 „	9,924	12,40	1 „	0,966 184	11,98
37 „	10,219	12,80	2 „	0,933 511	11,95
38 „	10,579	13,20	3 „	0,901 943	11,91
39 „	10,949	13,70	4 „	0,871 442	11,94
				zusammen	59,88 ‰

Die Vorauszahlung wäre auf 59,90 ‰ festzusetzen, sodaß also für 20 000 Mk. Kapital ein Betrag von 1198 Mk. einzuzahlen wäre.

Warum ist der vorauszuzahlende Betrag größer als die technische einmalige Prämie?

Weil aus dem vorausgezahlten Betrage, wenn der Versicherte während der festgesetzten kurzen Dauer sterben sollte, die „unverbrauchten“ Prämien (entsprechend diskontiert) zurückzuzahlen sind, während die einmalige Prämie ein für allemal der Gesellschaft gehört.

Die am Schlusse der einzelnen Jahre beim Ableben zurückzuzahlenden Beträge findet man, indem man von dem genauen Betrag der Vorauszahlung jeweils die fällige Prämie abzieht und den Rest mit dem rechnungsmäßigen Zinssatz aufzinst.

Genauer Betrag der Vorauszahlung:

	59,8740 ‰
1. Prämie	12,1000 ‰
Rest	47,7740 ‰
1) aufgezinst	49,4461 ‰
2. Prämie	12,4000 ‰
Rest	37,0461 ‰

(2) aufgezinst	38,3427 ‰
3. Prämie	12,8000 ‰
Rest	25,5427 ‰
(3) aufgezinst	26,4367 ‰
4. Prämie	13,2000 ‰
Rest	13,2367 ‰
(4) aufgezinst	13,7000 ‰
5. Prämie	13,7000 ‰
Rest	0,0000 ‰.

Die mit (1), (2), (3), (4) bezeichneten Werte geben an, welcher Betrag fürs Tausend der Versicherungssumme erstattet werden muß, wenn der Versicherte stirbt, kurz bevor die jeweilige neue Prämie fällig geworden ist.

Aufgabe 35

Ein 38jähriger will zum Zwecke seiner Versorgung ein ihm zur Verfügung stehendes Kapital von 14 400 Mark als einmalige Einlage für eine auf das 60. Lebensjahr abgekürzte gemischte Versicherung einzahlen. Welche Summe kann versichert werden, wenn die Gesellschaft zur Nettoeinlage einen Aufschlag von 8 % hinzurechnet? [Formel (51a)].

$$M_{38} = 9\,767{,}900\,3$$
$$M_{60} = 4\,636{,}591\,1$$
$$\text{Diff.} = 5\,131{,}309\,2$$
$$D_{60} = 7\,094{,}612$$
$$\text{Summe} = 12\,225{,}921$$
$$D_{38} = 22\,931{,}74$$
$$A_{38,\overline{22}|} = 0{,}533\,144$$
$$1{,}08 \cdot A_{38,\overline{22}|} = 0{,}575\,796\,.$$

Die einmalige Einlage ist auf 576 ‰ festzusetzen. Für eine Einlage von 14 400 Mk. kann also gerade genau ein Kapital von 25 000 Mk. versichert werden.

Aufgabe 36

Der 38jährige des vorigen Beispiels beabsichtigt, die ihm im Erlebensfalle nach 22 Jahren bar auszuzahlende Summe zum Erwerb einer vorschüssig zu zahlenden lebenslänglichen Leibrente zu verwenden. Es soll eine Jahresrente von 3000 Mk. sichergestellt werden. Da die Versicherungssumme dazu regelrecht nicht ausreicht, geht er die Versicherung in der Weise ein, daß die Lebensfallsumme höher bemessen wird als die Todesfallsumme, nämlich so hoch, daß sie zur Zahlung der Rente von 3000 Mk. gerade ausreicht. Die Gesellschaft verwendet für die Zusatzversicherung ebenfalls die Tafel M. u. W. I ($3\frac{1}{2}$%) und begnügt sich mit einem Aufschlag von 10%. Welche einmalige Einlage ist für diese Form der Versicherung einzuzahlen? [Formeln ($40\underline{^e}$) und ($51\underline{^d}$)].

Die Rente soll vorschüssig gezahlt werden, was nicht zu übersehen ist.

$$\begin{aligned} N_{60} &= 72\,687{,}190 \\ D_{60} &= 7\,094{,}612 \\ a_{60} &= 10{,}2454 \\ 1{,}10 \cdot a_{60} &= 11{,}2699 \qquad \underline{1127\,\%.} \end{aligned}$$

Für 3000 Mk. Jahresrente ist eine Rentenkaufsumme von 33 810 Mk. erforderlich. Es steht aber aus der Hauptversicherung nur ein Kapital von 25 000 Mk. zur Verfügung. Für den Erlebensfall ist also ein Betrag von 8810 Mk. mehr zu versichern.

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{8810}{25\,000} &= 0{,}3524 \\ (1+\alpha) &= 1{,}3524 \\ D_{60} &= 7\,094{,}612 \\ (1+\alpha)\cdot D_{60} &= 9\,594{,}753 \\ (M_{83} - M_{60}) &= \underline{5\,131{,}309} \\ \text{Summe} &= 14\,726{,}062 \end{aligned}$$

$$D_{38} = 22\,931{,}74$$
$$A^{1,(1+a)}_{38,\overline{22}|} = 0{,}642\,169 = h$$
$$1{,}08 \cdot h = 0{,}693\,543\,.$$

Für die erweiterte Form der Versicherung ergibt sich eine Einlage von 694 ‰. Das Einlagekapital ist also auf 17 350 Mk. festzusetzen. Die Versicherung eignet sich gut als Pensionsversicherung.

Aufgabe 37

Wie ändert sich in der Aufgabe 35 und 36 die einmalige Einlage, wenn berücksichtigt werden soll, daß die Todesfallsummen durchschnittlich in der Mitte des Jahres fällig werden?

Hier ist vor einem Fehler zu warnen. Es wäre falsch,

$$A^0_{x,\overline{n}|} = A_{x,\overline{n}|} \cdot \sqrt{1+i}$$

zu setzen. Denn es darf nur der Teil des Barwertes erhöht werden, der die Todesfallzahlungen ausdrückt.

$$(M_{38} - M_{60}) = 5\,131{,}3092$$
$$(M_{38} - M_{60})\sqrt{1+i} = 5\,220{,}337$$
$$D_{60} = 7\,094{,}612$$
$$\text{Summe} = 12\,314{,}949$$
$$D_{38} = 22\,931{,}74$$
$$A^0_{38,\overline{22}|} = 0{,}537\,026$$
$$1{,}08 \cdot A^0_{38,\overline{22}|} = 0{,}579\,988\,.$$

Die Einlage ist von 576 ‰ auf 580 ‰ zu erhöhen.

Für 25 000 Mk. Todesfallsumme wäre also, wenn die Lebensfallsumme nicht erhöht werden soll, ein Kapital von 14 500 Mk. statt eines solchen von 14 400 Mk. einzuzahlen. Soll die Lebensfallsumme wieder zum Erwerb einer Rente von 3000 Mk. verwendet, demgemäß also auf 33 810 Mk. erhöht werden, so ist:

$$(1+\alpha)\ D_{60} = 9\,594{,}753$$
$$(M_{38} - M_{60})\sqrt{1+i} = \underline{5\,220{,}337}$$
$$\text{Summe} = 14\,815{,}090$$
$$D_{38} = 22\,931{,}74$$
$$A^{0\ 1,\ (1+\alpha)}_{38,\overline{22|}} = 0{,}646\,052 = h$$
$$1{,}08 \cdot h = 0{,}697\,736 \qquad \underline{698\ ^0/_{00}.}$$

Für die Pensionsversicherung wäre also die einmalige Einlage von 17 350 Mk. auf 17 450 Mk. zu erhöhen.

Aufgabe 38

Ein 37jähriger schließt eine Versicherung auf den Lebensfall ab, aus der er 6000 Mk. erhalten soll, wenn er nach 23 Jahren noch am Leben ist. Die Gesellschaft rechnet mit $12^1/_2\,^0/_{00}$ an einmaligen Unkosten; die laufenden Unkosten berechnet sie zum Satze von 5% aus der Bruttoprämie. Welche Jahresprämie ist zu fordern? [Formeln (53) und ($71\underline{^b}$)].

$$N_{37} = 413\,261{,}80 \qquad D_{60} = 7\,094{,}612$$
$$N_{60} = \underline{72\,687{,}19} \qquad D_{37} = 23\,988{,}07$$
$$\text{Diff.} = 340\,574{,}61$$

$$P = 0{,}020\,8313$$
$$a_{37,\overline{23|}} = 14{,}197\,67$$
$$\alpha = 12{,}5\ ^0/_{00}$$
$$\frac{\alpha}{a} = 0{,}8804\ ^0/_{00}$$
$$P = \underline{20{,}8313\ ^0/_{00}}$$
$$\text{Summe} = 21{,}7117\ ^0/_{00}$$
$$\beta = 0{,}05$$
$$(1-\beta) = 0{,}95$$
$$\mathfrak{p} = 22{,}8544\ ^0/_{00}.$$

Die Jahresprämie ist auf $\underline{22{,}90\,^0/_{00}}$, also auf $\underline{137{,}40\ \text{Mk.}}$ für 6000 Mk. Kapital festzusetzen.

Anmerkung. Die Durchführung der Rechnung läßt erkennen, daß es sich meist empfiehlt, die Jahresprämien nicht als Quotienten der Zähler der beiden Bar-Werte zu berechnen, sondern sich, wie das in der Praxis fast stets geschieht, zunächst beide Barwerte einzeln herzustellen. Den Rentenbarwert brauchte man ohnehin fast stets zur Berechnung des Aufschlages. Man wird also in dem Beispiel der Aufgabe 38 nicht rechnen

$$P = \frac{D_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}, \text{ sondern } P = \frac{D_{x+n}}{D_x} : \frac{(N_x - N_{x+n})}{D_x}.$$

Man erhält dann:

$$\begin{aligned}
\frac{D_{60}}{D_{37}} &= {}_{23}E_{37} = 295{,}756\,^0/_{00} \\
\alpha &= 12{,}500\,^0/_{00} \\
A + \alpha &= 308{,}256\,^0/_{00} \\
N_{37} &= 413\,261{,}80 \\
N_{60} &= 72\,687{,}19 \\
\text{Diff.} &= 340\,574{,}61 \\
a_{37,\overline{23|}} &= 14{,}197\,67 \\
P + \frac{\alpha}{a} &= 21{,}7117\,^0/_{00} = P^\alpha = \frac{A+\alpha}{a} \\
\frac{P^\alpha}{0{,}95} = \mathfrak{p} &= 22{,}8544\,^0/_{00} \qquad \underline{22{,}90\,^0/_{00}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 39

Um wieviel übersteigt in dem Beispiel der Aufgabe 38 die im Erlebensfalle auszuzahlende Summe absolut und relativ den Betrag, den eine mit $3^1/_2$ %iger Verzinsung rechnende Sparkasse nach 23 Jahren ausgezahlt hätte, wenn bei ihr alljährlich 137,40 Mk. eingelegt worden wären? [Formeln ($15\underline{^d}$) und ($6\underline{^a}$)].

Entweder:	oder:
$a_{\overline{23}\rceil} = 16{,}167\,125$	$a_{\overline{23}\rceil} = 16{,}167\,125$
$(1+i)^{23} = 2{,}206\,114$	$v^{23} = 0{,}453\,286$
Produkt $= 35{,}6665(2)$	Quotient $= 35{,}6665$.

Der genaue Wert $r_{\overline{23}\rceil} = 35{,}666\,528$ kann auch unmittelbar aus der Tafel entnommen werden.

$$r_{\overline{23}\rceil} = 35{,}666\,528$$
$$e = 137{,}40$$
$$\underline{c_{23} = 4900{,}58 \text{ Mk.}}$$

Das versicherte Lebensfallkapital ist um etwa 1100 Mk., also nahezu um $22\frac{1}{2}\%$ höher als das Sparkapital.

Das Lebensfallkapital weist übrigens fast genau eine 5%ige Verzinsung der Einlagen auf. Denn es ist:

$$i = 0{,}05$$
$$r_{\overline{23}\rceil} = 43{,}501\,999$$
$$e = 137{,}40$$
$$\underline{c_{23} = 5977{,}17 \text{ Mk.}}$$

Hier wäre nun die folgende Erwägung am Platze:

Wenn die Gesellschaft mit einem rechnungsmäßigen Zinssatz von $3\frac{1}{2}\%$ rechnet, ist eine Erlebensfallverzinsung von etwas mehr als 5% schon ziemlich hoch, wenigstens für die hier vorliegende Altersverbindung und unter der Voraussetzung, daß es sich um eine Grundversicherung handelt. Für eine Zusatzversicherung [Bonifikationsversicherung] wäre die Verzinsung als angemessen zu bezeichnen.

Liegt eine Grundversicherung vor, so wäre eigentlich eine Sterbetafel günstiger Lebensrisiken [eine Rentnersterblichkeitstafel] zu verwenden. Verzichtet man darauf, so kann man zur Not den Fehler durch einen Sicherheitszuschlag ausgleichen. Man kann zum Beispiel die reine Bruttoprämie noch um 5% erhöhen. Man hat dann:

$$\mathfrak{p} = 22{,}8544$$
$$1{,}05 \cdot \mathfrak{p} = 23{,}9971 \qquad \underline{24{,}-\ ^0/_{00}}.$$

Für 6000 Mk. Versicherungssumme wäre also eine Jahresprämie von 144 Mk. zu fordern.

Bei der Sparkasse ergäbe sich dann ein höheres Endkapital. Denn es ist:

$$i = 0{,}035$$
$$r_{\overline{23}|} = 35{,}666\,528$$
$$e = 144$$
$$\underline{c_{23} = 5135{,}98 \text{ Mk.}}$$

Das Lebensfallkapital wäre immer noch um etwa 864 Mk., also nahezu um 17 % höher als das Sparkapital, und zwar wiese das Lebensfallkapital eine Verzinsung der Einlagen auf, die nicht ganz den Satz von 4¾ % erreichte. Bei günstigem Stand des Geldmarktes erscheint eine solche Verzinsung nicht besonders vorteilhaft, wenn berücksichtigt wird, daß die Einlagen mit unbedingter Verlustgefahr [à fonds perdu] eingezahlt werden. Anderseits darf aber auch nicht übersehen werden, daß die Verzinsung gewährleistet wird, was bei der Sparkasse nicht der Fall ist.

Aufgabe 40

Auf das Leben eines 28jährigen soll eine Alterspension in der Weise versichert werden, daß ihm vom 65. Lebensjahre an eine Jahresrente von 2500 Mk. gezahlt wird, solange er dann noch am Leben bleibt. Die Prämien sind während der Aufschubsfrist zu entrichten. Die Gesellschaft rechnet mit einem Unkostensatz von 10 % der reinen [notwendigen] Bruttoprämie und fügt nachträglich noch einen Sicherheitsaufschlag von 5 % hinzu. Wie hoch ist die jährlich zu entrichtende Prämie? [Formeln (54) und ($75\underline{b}$)].

$$
\begin{aligned}
N_{28} &= 684\,033{,}76 \\
N_{65} &= 41\,864{,}81 \\
\hline
\text{Diff.} &= 642\,168{,}95 \\
D_{28} &= 35\,559{,}88 \\
{}_{37|}a_{28} &= 1{,}177\,30 \\
a_{28,\overline{37}|} &= 18{,}058\,81 \\
P &= 0{,}065\,193 \\
\frac{P}{0{,}90} \cdot 1{,}05 &= 0{,}076\,058 \qquad \underline{7{,}60\,\%}\,.
\end{aligned}
$$

Die Jahresprämie ist auf 7,60 Mk. für je 100 Mk. Jahresrente festzusetzen. Für 2500 Mk. Jahresrente ist also eine Jahresprämie von 190 Mk. zu zahlen. Diese Prämie ist längstens 37 Jahre hindurch zu entrichten. Im ganzen sind also höchstens 7030 Mk. an Prämien einzuzahlen. Mit 3½%igen Zinsen und Zinseszinsen sind es indes 14 445,50 Mk.

Aufgabe 41

Wie oft muß dem in dem Beispiel der Aufgabe 40 erwähnten Versicherten die Rente [die Alterspension] ausgezahlt werden, bis die Einlagen mit 3½%igen Zinsen und Zinseszinsen aufgebraucht sind? [Formel (10a)].

$$
\begin{aligned}
c &= 14\,445{,}50 \\
e &= 2\,500 \\
i &= 0{,}035\,.
\end{aligned}
$$

Gesucht ist n. Man verzichtet jedoch hier gewöhnlich auf die umständliche logarithmische Berechnung und hilft sich mit dem sogenannten „Probieren“. Schätzt man zum Beispiel $n = 8$, so ist:

$$
\left.\begin{aligned}
c\,q^n &= 19{,}021{,}96 \\
e \cdot r_{\overline{n}|} &= 23\,421{,}24\,;
\end{aligned}\right\} \quad \text{n ist also zu groß gewählt.}
$$

Setzt man $n = 7$, so ist:

$$
\left.\begin{aligned}
c\,q^n &= 18\,378{,}70 \\
e \cdot r_{\overline{n}|} &= 20\,129{,}22\,;
\end{aligned}\right\} \quad \text{n ist richtig eingeschätzt.}
$$

Für $n = 6$ aber erhält man:

$$c\,q^n = 17\,757{,}20$$
$$e \cdot r_{\overline{n|}} = 16\,948{,}52\,;$$

n wäre also schon zu klein.

Wenn 7 Renten gezahlt sind, ist das Kapital aufgebraucht. Dann hat die Gesellschaft sogar schon etwas daraufgelegt.

Aufgabe 42

Auf das Leben eines 23jährigen soll eine Risikoversicherung mit 10jähriger Dauer abgeschlossen werden. Die Versicherungssumme soll 40 000 Mk. ausmachen. Abschlußprovision wird nicht vergütet; dagegen soll vom 1. Jahre an eine Inkassoprovision von 8 % gezahlt werden. Die laufenden Unkosten sind zum Satze von 2 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme einzurechnen. Welche Jahresprämie ist zu fordern? [Formeln (58) und ($76\underline{^b}$)].

$$M_{23} = 14\,114{,}0906 \qquad N_{23} = 886\,677{,}21$$
$$M_{33} = 11\,032{,}8920 \qquad N_{33} = 520\,619{,}50$$
$$\text{Diff.} = 3\,081{,}1986 \qquad \text{Diff.} = 366\,057{,}71$$
$$D_{23} = 44\,098{,}34$$
$${}_{10}A_{23} = 0{,}069\,8711 \qquad a_{23,\overline{10|}} = 8{,}30094$$
$$P = 0{,}0084\,1725 \qquad \underline{8{,}42\,^0/_{00}}$$
$$P + \beta = 0{,}0104\,1725$$
$$\frac{P+\beta}{0{,}92} = 0{,}011\,323\,.$$

Es ergibt sich eine Jahresprämie von $\underline{11{,}35\,^0/_{00}}$. Für 40 000 Mk. Versicherungssumme ist also eine Prämie von <u>454 Mk.</u> zu fordern. Lebt der Versicherte am Schlusse des 10. Versicherungsjahres, so ist der eingezahlte Betrag von 4540 Mk. ohne sichtbare Gegenleistung verfallen. Die Gegenleistung hat dann darin bestanden, daß dem Versicherten 10 Jahre hindurch der Versicherungsschutz gewährt worden ist.

Aufgabe 43

Mit Rücksicht auf die Möglichkeit des Verlustes der eingezahlten Prämien zieht der in dem Beispiel der Aufgabe 42 erwähnte Antragsteller den Abschluß einer lebenslänglichen Todesfallversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung in Erwägung. Wie hoch stellt sich in diesem Falle die Jahresprämie, wenn die Gesellschaft mit 35 ‰ an einmaligen Unkosten, mit 2 ‰ an laufenden Unkosten und mit 3 % an Inkassokosten zu rechnen hat. [Formeln ($56\underline{a}$) und ($72\underline{b}$)].

$$M_{23} = 14\,114{,}0906 \qquad N_{23} = 886\,677{,}21$$
$$D_{23} = 4\,4098{,}34 \qquad D_{23} = 44\,098{,}34$$
$$A_{23} = 0{,}320\,059 \qquad a_{23} = 20{,}106\,82$$

$$P = 15{,}9179(5)\ ‰$$
$$\frac{\alpha}{a} = 1{,}7407(0)\ ‰$$
$$\beta = 2{,}0000(0)\ ‰$$
$$\text{Zähler} = 19{,}6586(5)\ ‰$$
$$\text{Nenner} = 0{,}97$$
$$\mathfrak{p} = 20{,}2666\ ‰ \qquad \underline{20{,}30\ ‰}\,.$$

Die Jahresprämie beläuft sich auf <u>812 Mk.</u> für 40 000 Mark Versicherungssumme. Hat die Versicherung 10 Jahre hindurch bestanden, so ist der eingezahlte Betrag von <u>8120 Mk.</u> nicht voll verloren, wenn die Versicherung dann nicht fortgesetzt werden soll. Die Versicherung kann dann vielmehr entweder zurückgekauft oder in eine prämienfreie umgewandelt werden. [Vgl. Aufgabe 85!].

Aufgabe 44

Ein 35jähriger schließt eine lebenslängliche Todesfallversicherung in der Weise ab, daß Prämien dafür höchstens 20 Jahre hindurch zu zahlen sind. Das Todes-

fallkapital soll auf 15000 Mk. festgesetzt werden. Für den Fall jedoch, daß der Versicherte den Endtermin der Prämienzahlung erlebt, ist die Zahlung einer „Bonifikation“ von 7500 Mk. vereinbart. Die Versicherung soll dann weiterhin als prämienfreie Versicherung über den vollen Betrag von 15 000 Mk. weiterlaufen. Die Gesellschaft rechnet mit den folgenden Unkostensätzen:

an Abschlußkosten: 20 ‰ der Versicherungssumme,

an laufenden Unkosten: 3 ‰ der Versicherungssumme, solange Prämien entrichtet werden, und 2 ‰ der Versicherungssumme, wenn die Versicherung prämienfrei geworden ist,

an Inkassokosten: 3½ % der Bruttoprämie.

Welche Prämie ist längstens 20 Jahre hindurch zu entrichten? [Formeln (53), ($56\underline{c}$) und ($72\underline{f}$)].

$$M_{35} = 10\,515{,}0014 \qquad N_{35} = 464\,572{,}29$$
$$\frac{1}{2} D_{55} = 4\,876{,}6475 \qquad N_{55} = 115\,966{,}46$$
$$\text{Summe} = 15\,391{,}6489 \qquad \text{Diff.} = 348\,605{,}83$$
$$D_{35} = 26\,225{,}18$$
$$a_{35,\overline{20}|} = 13{,}2927(9)$$
$$A_{35} + \frac{1}{2}\,{}_{20}E_{35} = 0{,}586\,903(5) \qquad a_{35} = 17{,}7147(4)$$

$$A_{35} + \frac{1}{2} \cdot {}_{20}E_{35} = 586{,}903(5)\,‰$$
$$\alpha = 20{,}000(0)\,‰$$
$$\beta_2 \cdot a_{35} = 35{,}429(5)\,‰$$
$$(\beta_1 - \beta_2) \cdot a_{35,\overline{20}|} = 13{,}292(8)\,‰$$
$$\text{Zähler} = 655{,}625(8)\,‰$$
$$0{,}965 \cdot a_{35,\overline{20}|} = \text{Nenner} = 12{,}8275(4)$$
$$\mathfrak{p} = 51{,}1108\,‰.$$

Es ergibt sich eine Jahresprämie von 51,20 ‰. Für ein Todesfallkapital von 15 000 Mk. ist also eine Prämie von 768 Mk. festzusetzen. Im ganzen sind dann für die Versicherung höchstens 15 360 Mk. an Prämien einzuzahlen.

Eine Versicherung dieser Art ist namentlich auch als Altersversorgungsversicherung oft recht zweckmäßig. Denn wenn der Versicherte den Endtermin der Prämienzahlungsdauer erlebt, ist er im allgemeinen sehr billig versichert gewesen. Leider wird der wirtschaftliche Vorteil dieser Art der Versicherung noch wenig gewürdigt.

Aufgabe 45

Ein 28jähriger schließt eine gemischte Versicherung mit Abkürzung auf das 55. Lebensjahr, also mit 27jähriger Versicherungsdauer ab. Die Versicherungssumme wird auf 4000 Mk. festgesetzt. Die Jahresprämie soll ebenfalls längstens 27 Jahre hindurch gezahlt werden. Für die Bemessung der Zuschläge seien zwei Methoden einander gegenübergestellt:

I. Abschlußkosten: 20 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme, Verwaltungskosten: 10% der um die Abschlußkostenquote erhöhten Nettoprämie.

II. Erwerbskosten: 35 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme, laufende Unkosten: 2 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme, Inkassokosten: 3% der Bruttoprämie.

Welche Prämie ist zu zahlen, wenn das eine oder das andere Zuschlagverfahren angewendet wird? [Formeln (59), ($71^{\underline{c}}$) und ($72^{\underline{b}}$)].

$M_{28} = 12\,428{,}3019$	$N_{28} = 684\,033{,}76$
$M_{55} = 5\,831{,}7260$	$N_{55} = 115\,966{,}46$
$\text{Diff.} = 6\,596{,}5759$	$\text{Diff.} = 568\,067{,}30$
$D_{55} = 9\,753{,}295$	$D_{28} = 35\,559{,}88$
$\text{Summe} = 16\,349{,}871$	$a_{28,\overline{27}\rceil} = 15{,}974\,95$
$D_{28} = 35\,559{,}88$	$P_{28,\overline{27}\rceil} = 0{,}028\,7816$
$A_{28,\overline{27}\rceil} = 0{,}459\,784$	$\underline{28{,}78\ ^0/_{00}}$
$\dfrac{20\ ^0/_{00}}{a_{28,\overline{27}\rceil}} = 1{,}2520\ ^0/_{00}$	$\dfrac{35\ ^0/_{00}}{a_{28,\overline{27}\rceil}} = 2{,}1909\ ^0/_{00}$

I.
$$P+\frac{\alpha}{a}=30{,}0336\,{}^0/_{00}$$
$$1{,}10\cdot\left(P+\frac{\alpha}{a}\right)=33{,}0370\,{}^0/_{00}\,.$$

Je nach der Art der Abrundung wäre ein Prämiensatz von $\underline{33{,}\text{—}\,{}^0/_{00}}$ oder ein solcher von $\underline{33{,}05\,{}^0/_{00}}$ oder ein solcher von $\underline{33{,}10\,{}^0/_{00}}$ festzusetzen. Rundet die Gesellschaft zum Beispiel auf volle Beträge von 10 Pfg. nach oben oder nach unten hin ab, so ergibt sich ein Satz von $\underline{33{,}\text{—}\,{}^0/_{00}}$, also für 4000 Mk. Kapital eine Jahresprämie von $\underline{132\text{ Mk.}}$

II.
$$P+\frac{\alpha}{a}=30{,}9725\,{}^0/_{00}$$
$$\beta=2{,}0000\,{}^0/_{00}$$
$$\text{Summe}=32{,}9725\,{}^0/_{00}=h$$
$$\frac{h}{0{,}97}=33{,}9923\,{}^0/_{00}=\mathfrak{p}\,.$$

Nach dem zweiten Verfahren wäre ein Prämiensatz von $\underline{34\,{}^0/_{00}}$ festzusetzen, sodaß also die Jahresprämie für 4000 Mk. Versicherungssumme $\underline{136\text{ Mk.}}$ ausmachen müßte.

Aufgabe 46

Wie ändert sich die Prämie der in der Aufgabe 45 behandelten Versicherung, wenn sie längstens bis zum 50. Lebensjahre entrichtet werden soll, und wenn das zweite Zuschlagverfahren dahin ergänzt wird, daß während der prämienfreien letzten 5 Jahre der Aufschlag auf 1 ${}^0/_{00}$ der Versicherungssumme ermäßigt wird? [Formeln (60), ($71\underline{c}$) und ($72\underline{g}$)].

Von den Werten der Aufgabe 45 können verwendet werden die Barwerte:

$$A_{28,\overline{27|}}=0{,}459\,784$$
$$a_{28,\overline{27|}}=15{,}9749(5)\,.$$

Weiter ist dann:

$$
\begin{aligned}
N_{28} &= 684\,033{,}76 \\
N_{50} &= 173\,867{,}58 \\
\hline
\text{Diff.} &= 510\,166{,}18 \\
D_{28} &= 35\,559{,}88 \\
a_{28,\overline{22}|} &= 14{,}3466(8) \\
{}_{22}P_{28,\overline{27}|} &= 0{,}032\,0481 \qquad \underline{32{,}05\,^0/_{00}\,.}
\end{aligned}
$$

I.

$$
\begin{aligned}
\frac{20\,^0/_{00}}{a_{28,\overline{22}|}} &= 1{,}3941\,^0/_{00} \\
P &= 32{,}0481\,^0/_{00} \\
\hline
P + \frac{\alpha}{a} &= 33{,}4422\,^0/_{00} \\
1{,}10 \cdot \left(P + \frac{\alpha}{a}\right) &= 36{,}7864\,^0/_{00}\,.
\end{aligned}
$$

Bei einem Prämiensatz von $\underline{36{,}80\,^0/_{00}}$ ergibt sich für 4000 Mk. Kapital eine Jahresprämie von 147.20 Mk.

II.

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= 0{,}002 \\
\beta_2 &= 0{,}001 \\
\hline
(\beta_1 - \beta_2) &= 0{,}001 \\
A &= 459{,}784\,^0/_{00} \\
\alpha &= 35{,}000\,^0/_{00} \\
\beta_2 \cdot a_{28,\overline{27}|} &= 15{,}975\,^0/_{00} \\
(\beta_1 - \beta_2) \cdot a_{28,\overline{22}|} &= 14{,}347\,^0/_{00} \\
\hline
\text{Zähler} &= 525{,}106\,^0/_{00} \\
0{,}97 \cdot a_{28,\overline{22}|} = \text{Nenner} &= 13{,}9162(8) \\
\mathfrak{p} &= 37{,}7332\,^0/_{00}\,.
\end{aligned}
$$

Bei einem Prämiensatz von $\underline{37{,}75\,^0/_{00}}$ ergäbe sich für 4000 Mk. Kapital eine Jahresprämie von <u>151,— Mk.</u>

Anmerkung. In den folgenden Aufgaben sind die Barwerte im allgemeinen nicht mehr einzeln berechnet, sondern aus den im Anhange gegebenen Tafeln entnom-

men, soweit sie darin enthalten sind. Die bisherigen Aufgaben haben genug Gelegenheit geboten, die Berechnung von Barwerten einzuüben. In der Praxis sind Barwerte nur selten zu berechnen, da sie für die meisten der überhaupt vorkommenden Kombinationen aus Tabellen entnommen werden können.

Aufgabe 47

Ein 30jähriger Vater schließt für sein 1jähriges Töchterchen eine Ausstattungsversicherung in der Weise ab, daß er ein Kapital von 6000 Mk. sicherstellt, das mit dem vollendeten 21. Lebensjahr der Tochter, also nach 20 Jahren fällig werden soll, gleichviel ob er selbst dann noch am Leben ist oder nicht. Auch von dem Leben der Tochter soll die Auszahlung des Kapitals nicht abhängig sein. Die Prämien sollen nur bis zum Ableben des Vaters, längstens jedoch bis zum Ablauf der festen Versicherungsdauer entrichtet werden. Die Gesellschaft rechnet mit einem einmaligen Unkostensatz von 30 ‰ sowie mit einem Aufschlag von 7 % der Bruttoprämie, worin die Inkassokosten enthalten sein sollen. Welche Jahresprämie ist zu fordern? [Formeln (62) und ($71\underline{b}$)].

$$A_{\overline{20|}} = v^{20} = 0{,}502\,566$$

$$a_{30,\overline{20}|} = 13{,}502\,27$$

$$P_{30,\overline{20|}} = 37{,}2208(5)\ ‰$$

$$\frac{\alpha}{a} = 2{,}2218(5)\ ‰$$

$$\text{Summe} = 39{,}4427\ ‰ = h$$

$$\frac{h}{0{,}93} = 42{,}4115 \qquad \underline{42{,}45\ ‰}\ .$$

Für 6000 Mk. Aussteuersumme ist eine Jahresprämie von <u>254.70 Mk.</u> zu fordern.

Aufgabe 48

Welche Zusatzprämie ist zu zahlen, wenn die in der vorigen Aufgabe behandelte Versicherung als „Familienversicherung“ abgeschlossen wird, derart, daß beim Ableben des Versorgers sofort ein „Sterbegeld“ von 600 Mk. und alsdann am Jahrestage der Versicherung alljährlich eine Rente von 600 Mk. auszuzahlen ist, die zum letzten Male fällig wird, wenn bei Lebzeiten des Versorgers die letzte Prämie fällig geworden wäre. [Formeln (66), (68) und ($71\underline{^b}$)].

$$\begin{aligned}
a_{\overline{20}|} &= 14{,}709\,84 \\
a_{30,\overline{20}|} &= 13{,}502\,27 \\
\hline
\text{Diff.} &= 1{,}207\,57 = h \\
M_{30} &= 11\,850{,}1244 \\
M_{50} &= 6\,982{,}0017 \\
\hline
\text{Diff.} &= 4\,868{,}1227 \\
D_{30} &= 32\,627{,}26 \\
{}_{20}A_{30} &= 0{,}149\,20(4) \\
h &= 1{,}207\,57 \\
\hline
{}_{20}A_{30} + h &= 1{,}356\,77 = h' \\
\varrho &= 0{,}1 \\
\varrho \cdot h' &= 0{,}135\,677 \\
v^{20} &= 0{,}502\,566 \\
\hline
A^{0,1}_{30,\overline{20}|} &= 0{,}638\,243 \\
a_{30,\overline{20}|} &= 13{,}502\,27 \\
P^{0,1}_{30,\overline{20}|} &= 0{,}047\,2693 \qquad \underline{47.27\,{}^0/_{00}\,.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^{0,1}_{30,\overline{20}|} &= 47{,}2693\,{}^0/_{00} \\
P_{30,\overline{20}|} &= 37{,}2208\,{}^0/_{00} \\
\hline
\text{Diff.} &= 10{,}0485\,{}^0/_{00}\,.
\end{aligned}$$

In den Nettoprämien ergibt sich ein Unterschied von <u>10,05 ${}^0/_{00}$</u> oder <u>60,30 Mk.</u> für 6000 Mk. Versicherungssumme.

$$
\begin{aligned}
P &= 47{,}2693\ {}^0/_{00} \\
\frac{\alpha}{a} &= \ 2\,2219\ {}^0/_{00} \\
\hline
\text{Summe} &= 49{,}4912\ {}^0/_{00} = h'' \\
\frac{h''}{0{,}93} &= 53{,}2163\ {}^0/_{00} = \mathfrak{p}.
\end{aligned}
$$

Es wäre ein Prämiensatz von 53,25 $^0/_{00}$, für 6000 Mk. Versicherungssumme, also eine Jahresprämie von 319,50 Mk. festzusetzen. Die Zusatzprämie beläuft sich auf 10,80 $^0/_{00}$, also auf 64,80 Mk. für 6000 Mk. Kapital.

Aufgabe 49

Um wieviel kann die Prämie für die in den vorigen beiden Aufgaben behandelte Versicherung ermäßigt werden, wenn die Versicherungssumme, falls der Versorger nach 20 Jahren noch am Leben ist, nicht sofort ausgezahlt werden soll, sondern wenn ihm statt dessen eine prämienfreie Versicherung über den Betrag von 6000 Mk. gewährt werden soll mit der Bestimmung, daß dieser Betrag dann bei seinem Ableben sofort fällig wird? [Formeln ($67\frac{c}{}$), (69) und ($71\frac{b}{}$)].

$$
\begin{aligned}
M_{30} &= 11\,850{,}1244 \\
D_{30} &= 32\,627{,}26 \\
A_{30} &= \ 0{,}363\,196(8) \\
A_{30,\overline{20}|} &= \ 0{,}543\,401\,(4) \\
\hline
\text{Diff.} &= \ 0{,}180\,204(6) = h \\
A^{0,1}_{30,\boxed{20}} &= \ 0{,}638\,243 \\
h &= \ 0{,}180\,205 \\
\hline
A^{0,1}_{30,\boxed{20}} &= 0{,}458\,038 \\
a_{30,\overline{20}|} &= 13{,}502\,27 \\
P^{0,1}_{30,\boxed{20}} &= \ 0{,}033\,9230 & \underline{33{,}92\ {}^0/_{00}}. \\
P + \frac{\alpha}{a} &= 36{,}1449\ {}^0/_{00} \\
\mathfrak{p} &= 38{,}8655\ {}^0/_{00} & \underline{38{,}90\ {}^0/_{00}}.
\end{aligned}
$$

Die Prämie kann gegenüber der Prämie für die einfache Versicherung auf festen Termin um $\underline{3,55\ {}^0/_{00}}$, für 6000 Mk. Kapital also um $\underline{21,30\text{ Mk.}}$ im Jahr ermäßigt werden. Gegenüber der Prämie für die erste Form der „Familienversicherung" kann sie um $\underline{14,35\ {}^0/_{00}}$, also um $\underline{86,10\text{ Mk.}}$ ermäßigt werden.

Aufgabe 50

Ein 40jähriger schließt eine gemischte Versicherung mit 20jähriger Dauer in der Weise ab, daß er vom 6. Jahre an eine sich alljährlich um 5% der Anfangsprämie verringernde Jahresprämie zu entrichten hat. Die Versicherungssumme beläuft sich auf 12 000 Mk. Die Gesellschaft rechnet mit 25 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme als Aufschlag für Erwerbskosten und außerdem mit einem Zuschlag von 5% der Bruttoprämie als Aufschlag für laufende Unkosten. Wie verläuft die Prämienzahlung, und welche Gesamtleistung ergibt sich nach 20 Jahren? [Formeln ($79\underline{a}$) und ($71\underline{b}$)].

$$
\begin{aligned}
S_{45} &= 2\,906\,486{,}89 \\
S_{60} &= 584\,413{,}51 \\
\hline
\text{Diff.} &= 2\,322\,073{,}38 \\
15 \cdot N_{60} &= 1\,090\,307{,}85 \\
\hline
\text{Diff.} &= 1\,231\,765{,}53 \\
D_{40} &= 20\,932{,}70 \\
{}^5a'_{40,\overline{20|}} &= 58{,}844\,08 \\
\varepsilon &= 0{,}05 \\
\varepsilon \cdot a' &= 2{,}942\,20(4) \\
a_{40,\overline{20|}} &= 12{,}981\,66 \\
\hline
\overset{>}{a}_{40,\overline{20|}} &= 10{,}039\,45(6) \\
A_{40,\overline{20|}} &= 561{,}0066\ {}^0/_{00} \\
\overset{>}{P}_{40,\overline{20|}} &= 55{,}8802 \qquad \underline{55{,}88\ {}^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

Die reine Nettoprämie wäre zunächst auf 670,56 Mk. für 12000 Mk. Versicherungssumme festzusetzen. Vom 6. Jahre an hätte sich diese Prämie dann alljährlich um je 33,53 Mk. oder 33,52 Mk. zu ermäßigen.

$$A + \alpha = 586{,}0066\ ^0/_{00}$$

$$\frac{A + \alpha}{a_{>}} = 58{,}3704\ ^0/_{00} = h$$

$$\frac{h}{0{,}95} = 61{,}4425\ ^0/_{00} = \mathfrak{p}\,.$$

Es könnte zweckmäßig eine erhöhte Anfangsprämie von 62,— $^0/_{00}$ festgesetzt werden, sodaß für 12000 Mk. Versicherungssumme zunächst 5 Jahre hindurch eine Prämie von 744 Mk. zu zahlen wäre, die sich dann vom 6. Jahre an alljährlich um je 37,20 Mk. ermäßigte. Im letzten Jahre wäre nur noch eine Prämie von 186 Mk. zu entrichten.

Die Gesamtleistung kann man verschieden ermitteln.

Man kann ausgehen von dem nfachen Betrage der Anfangsprämie und davon die Minderungsbeträge [bisweilen auch „garantierte Dividenden" genannt] abziehen. Dann ist

$$S = 20\,\mathfrak{p}_{>} - \frac{15 \cdot 16}{2} \cdot \varepsilon \cdot \mathfrak{p}_{>}$$ [vgl. die Aufgaben 14 und 15, auf Seite 11 und 13!]

$$S = \left(20 - \frac{15 \cdot 16}{2} \cdot 0{,}05\right) \cdot \mathfrak{p}_{>} = 14\,\mathfrak{p}_{>}$$

$$S = 868{,}\text{—}\ ^0/_{00}.$$

Es ergibt sich höchstens eine Gesamtleistung von 10 416 Mk. für 12 000 Mk. Versicherungssumme.

Man kann auch die Formel $S = \frac{m}{2}(a + z)$ anwenden [vgl. die Aufgabe 15!], und zwar entweder auf die letzten 16 oder nur auf die letzten 15 Jahre. Es ist dann:

$$\begin{array}{rl} m = & 16 \\ a = & 62,\!-\ ^0/_{00} \\ z = & 15,50\ ^0/_{00} \\ \hline a + z = & 77,50\ ^0/_{00} \\ S = & 620,\!-\ ^0/_{00} \\ 4 \cdot \mathfrak{p}^{>} = & 248,\!-\ ^0/_{00} \\ \hline \text{Summe} = & \underline{868,\!-\ ^0/_{00}}\,. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} m = & 15 \\ a = & 58,90\ ^0/_{00} \\ z = & 15,50\ ^0/_{00} \\ \hline a + z = & 74,40\ ^0/_{00} \\ S = & 558,\!-\ ^0/_{00} \\ 5 \cdot \mathfrak{p}^{>} = & 310,\!-\ ^0/_{00} \\ \hline \text{Summe} = & \underline{868,\!-\ ^0/_{00}}\,. \end{array}$$

Aufgabe 51

Was hätte zu geschehen, wenn in dem Beispiel der Aufgabe 50 statt des Minderungssatzes von 5 % ein Satz von 10 % festgesetzt werden sollte? [Formeln ($79\underline{a}$) und ($71\underline{b}$)].

$$\begin{array}{rl} {}^5a'_{40,\overline{20}|} = & 58,844\,08 \\ \varepsilon = & 0,10 \\ \varepsilon \cdot a' = & 5,884\,41 \\ a_{40,\overline{20}|} = & 12,981\,66 \\ \hline a^{>}_{40,\overline{20}|} = & 7,097\,25\ . \\ A + a = & 586,0066\ ^0/_{00} \\ h^{>} = & 82,5681\ ^0/_{00} \\ \mathfrak{p}^{>} = & 86,9138\ ^0/_{00} \qquad \underline{87,\!-\ ^0/_{00}}\,. \end{array}$$

Es wäre eine Prämie von 1044 Mk. für 12 000 Mk. Versicherungssumme festzusetzen. Diese Prämie hätte sich vom 6. Jahre an alljährlich um je 104,40 Mk. zu ermäßigen. Im 15. Jahre ergäbe sich also von selbst die Prämie null. Vom 16. Jahre an würde die Prämie dann negativ werden. Das bedeutet, daß die Gesellschaft eine Rente zu zahlen hätte. Im einzelnen ergäben sich die folgenden Werte:

	fürs Tausend der Summe	für 12000 Mk. Kapital
Prämie der ersten 5 Jahre	87,— ‰	1044,— Mk.
Barprämie des 6. Jahres	78,30 „	939,60 „
„ „ 7. „	69,60 „	835,20 „
„ „ 8. „	60,90 „	730,80 „
„ „ 9. „	52,20 „	626,40 „
„ „ 10. „	43,50 „	522,— „
„ „ 11. „	34,80 „	417,60 „
„ „ 12. „	26,10 „	313,20 „
„ „ 13. „	17,40 „	208,80 „
„ „ 14. „	8,70 „	104,40 „
„ „ 15. „	0,00 „	0,00 „
Gesamtleistung	826,50 ‰	9918,— Mk.
Rente im 16. Jahre	8,70 ‰	104,40 Mk.
„ „ 17. „	17,40 „	208,80 „
„ „ 18. „	26,10 „	313,20 „
„ „ 19. „	34,80 „	417,60 „
„ „ 20. „	43,50 „	522,— „
Summe der Renten	130,50 ‰	1566,— Mk.

In der Praxis ist es lange Zeit hindurch fast allgemein gebräuchlich gewesen, eine „Nettoschlußzahl“ in der Weise zu berechnen, daß von dem Betrage der insgesamt einzuzahlenden Prämien etwaige Nachvergütungen (Renten, Dividenden oder dergleichen) abgezogen wurden. Das ergibt ein falsches, und zwar ein zu günstiges Bild. Im vorliegenden Falle ergäbe sich nach diesem nicht ganz einwandfreien Verfahren eine „Nettoleistung“ von 696 ‰, für 12000 Mk. Kapital also nur ein Betrag von 8352 Mk. Ein besseres Bild erhält man, wenn man der Leistung des Versicherten die Gegenleistung der Gesellschaft gegenüberstellt.

	fürs Tausend der Summe	für 12000 Mk. Kapital
Leistung des Versicherten	826,50 ‰	9918,— Mk.
Gegenleistung der Gesellschaft	1130,50 ‰	13566,— Mk.

Hat der Versicherte dann den Endtermin erlebt, so hat er für je 100 Mk. Leistung 136,78 Mk. an Gegenleistung erhalten, oder er hat für je 1000 Mk. Gegenleistung 731,09 Mk. an Prämienleistung aufgewendet. Die gerade in dem hier gewählten Beispiel besonders ins Gewicht fallende Verschiedenheit der Zinswirkung ist dabei indes noch nicht berücksichtigt.

Uebrigens sei hervorgehoben, daß in dem vorliegenden Beispiel der Minderungssatz nicht über 22 % hinausgehen dürfte. Für $22\frac{1}{4}$ % ergäbe sich eine negative Anfangsprämie, was technisch widersinnig wäre. Daß die Prämie überhaupt negativ werden kann, rührt daher, daß ihr Wert vorher durch den Wert $\mp\infty$ hindurchgegangen ist. Das geschieht im vorliegenden Falle, wenn $\varepsilon = 0{,}220611(1)$ wird.

Aufgabe 52

Inwiefern ist in dem Beispiel der Aufgabe 51 die Bemessung des Zuschlages nicht ganz einwandfrei, und wie läßt sich Abhilfe schaffen?

Der Zuschlag, aus dem die laufenden Unkosten bestritten werden sollen, ist berechnet im Verhältnis der Bruttoprämie. Bei mäßiger Minderung der Prämie geht das an. Wenn aber die Prämie negativ wird, dann wird auch der Zuschlag negativ. Die Gesellschaft müßte also in späteren Jahren, wenn die Rechnung begründet sein sollte, auch eine negative Inkassoprovision auszahlen, also selbst Inkassoprovision erhalten, was nicht der Fall ist. Bei starker Minderung der Prämie muß also das Zuschlagverfahren geändert werden. Am besten faßt man die vereinbarte Prämienminderung als Mitversicherung einer Rente auf und bedient sich der Bruttoformel ($72\underline{\text{d}}$), die man dabei sinngemäß zu ändern hat. Je nach dem, wie man den Satz der Inkassoprovision festgestellt hat, kann man ihn dann in die neue

Formel einsetzen. Ist die Minderung der Prämie nicht so stark, daß die Prämie negativ wird, so ist entweder:

$\mathfrak{P}^{>} \cdot a = A + \alpha + \beta \cdot a + \gamma \cdot a \cdot \mathfrak{P}^{>} + \varepsilon \cdot a' \cdot \mathfrak{P}^{>}$, also:

$$(72\tfrac{i}{}) \qquad \mathfrak{P}^{>} = \frac{A + \alpha + \beta \cdot a}{(1-\gamma)\,a - \varepsilon a'},$$

oder es ist:

$\mathfrak{P}^{>} \cdot a = A + \alpha + \beta \cdot a + \gamma \cdot a^{>} \cdot \mathfrak{P}^{>} + \varepsilon \cdot a' \cdot \mathfrak{P}^{>}$, also:

$$\left.\begin{matrix}(72\tfrac{k}{})\\(91)\end{matrix}\right\} \qquad \mathfrak{P}^{>} = \frac{A + \alpha + \beta \cdot a}{(1-\gamma) \cdot a^{>}} \qquad [a^{>} = a - \varepsilon \cdot a'].$$

Die erste Formel gilt, wenn der Inkassosatz nach dem Betrag der tarifmäßigen (Anfangs-)Prämien ermittelt worden ist, die zweite Formel dagegen gilt, wenn er nach dem Betrage der Barprämien bestimmt werden soll.

Ist die Minderung der Prämie so stark, daß die Prämie negativ wird, so darf nicht der Barwert

$$a^{>}_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} - \varepsilon \cdot a'_{x,\overline{n}|}$$

zur Berechnung des Inkassoaufschlages verwendet werden, sondern es muß statt dessen verwendet werden der Barwert:

$$a^{>}_{x,\overline{k}|} = a_{x,\overline{k}|} - \varepsilon \cdot a'_{x,\overline{k}|},$$

wobei unter k das Versicherungsjahr zu verstehen ist, in dem die Prämie gerade noch positiv (oder gleich null) ist. Die Formel ($72\tfrac{k}{}$) ist dann also abzuändern, wenn nicht aus Bequemlichkeitsgründen statt dessen die Formel ($72\tfrac{i}{}$) angewendet werden soll.

Setzt man wieder

$$\alpha = 0{,}025,$$

dann aber:

$\beta = 0{,}001$ [was ungefähr dem Zuschlag von
$\gamma = 0{,}030$, 5% der Bruttoprämie entspricht],

so ergeben sich für das Beispiel der Aufgabe 50 die folgenden Werte:

[Formel $(72^{\underline{i}})$]

$$\begin{aligned} A + \alpha &= 586{,}0066\ ^0/_{00} \\ \beta \cdot a_{40,\overline{20}|} &= \underline{\ \ 12{,}9817\ ^0/_{00}} \\ \text{Zähler} &= 598{,}9883\ ^0/_{00} \\ (1-\gamma)\, a_{40,\overline{20}|} &= \ \ 12{,}59\,221 \\ \varepsilon \cdot a'_{40,\overline{20}|} &= \underline{\ \ \ 2{,}94\,220} \\ \text{Nenner} &= \ \ \ 9{,}65\,001 \\ \mathfrak{P}^{>} &= \underline{\ \ 62{,}0713\ ^0/_{00}}. \end{aligned}$$

[Formel $(72^{\underline{k}})$]

$$\begin{aligned} \text{Zähler} &= 598{,}9883\ ^0/_{00} \\ a^{>}_{40,\overline{20}|} &= \ \ 10{,}039\,46 \\ (1-\gamma)\, a^{>}_{40,\overline{20}|} &= \ \ \ 9{,}738\,28 = \text{Nenner} \\ \mathfrak{P}^{>} &= \underline{\ \ 61{,}5086\ ^0/_{00}}. \end{aligned}$$

Es hätte in beiden Fällen eine Anfangsprämie von 62 $^0/_{00}$ festgesetzt werden können. Genauer ist die Formel $(72^{\underline{k}})$, die natürlich geringere Werte liefert als die Formel $(72^{\underline{i}})$.

Für das Beispiel der Aufgabe 51 ergeben sich die folgenden Werte:

[Formel $(72^{\underline{i}})$]

$$\begin{aligned} \text{Zähler} &= 598{,}9883\ ^0/_{00} \\ (1-\gamma)\, a_{40,\overline{20}|} &= \ \ 12{,}592\,21 \\ \varepsilon \cdot a'_{40,\overline{20}|} &= \underline{\ \ \ 5{,}884\,41} \\ \text{Nenner} &= \ \ \ 6{,}707\,80 \\ \mathfrak{P}^{>} &= \underline{\ \ 89{,}2973}. \end{aligned}$$

Hier macht sich der Unterschied in der Berechnungsart deutlich bemerkbar; denn es wäre eine Bruttoprämie von etwa $\underline{89\ ^0/_{00}}$ festzusetzen, während sich nach der in der Aufgabe 51 angewendeten Formel nur eine Prämie von $\underline{87\ ^0/_{00}}$ ergeben hat.

Rechnet man technisch genauer, so ist:

$$\mathfrak{P}^{>} \cdot a_{x,\overline{n}|} = A_{x,\overline{n}|} + \alpha + \beta \cdot a_{x,\overline{n}|} + \gamma \cdot a^{>}_{x,\overline{k}|} \cdot \mathfrak{P}^{>} + \varepsilon \cdot a'_{x,\overline{n}|} \cdot \mathfrak{P}^{>},$$

also:

$$(72\underline{k})\qquad \mathfrak{P}^{>} = \frac{A_{x,\overline{n}|} + \alpha + \beta \cdot a_{x,\overline{n}|}}{a_{x,\overline{n}|} - \gamma \cdot a^{>}_{x,\overline{k}|} - \varepsilon \cdot a'_{x,\overline{n}|}}.$$

Dabei ist:

$$a^{>}_{x,\overline{k}|} = a_{x,\overline{k}|} - \varepsilon \cdot a'_{x,\overline{k}|}.$$

Für das Beispiel der Aufgabe 51 ist $k = 14$ oder $k = 15$ zu setzen. Es ergibt sich:

$k = 14$		$k = 15$
2 906 486,89	S_{x+5}	2 906 486,89
1 198 589,70	S_{x+k}	1 072 285,79
1 136 735,19	$(k-5)\,N_{x+k}$	1 159 664,63
571 162,00	Diff.	674 536,47
20 932,70	D_x	20 932,70
27,285 63(5)	$a'_{x,\overline{k}|}$	32,224 05(5)
344 428,30	N_x	344 428,30
126 303,91	N_{x+k}	115 966,46
218 124,39	Diff.	228 461,84
10,420 27	$a_{x,\overline{k}|}$	10,914 11
2,728 56	$\varepsilon \cdot a'_{x,\overline{k}|}$	3,222 40
7,691 71	$a^{>}_{x,\overline{k}|}$	7,691 71

Die Werte $a^{>}_{x,\overline{k}|}$ fallen also für $k = 14$ und $k = 15$ zusammen, was auch zu erwarten war. Alsdann ist weiter:

$$\begin{aligned}
\text{Zähler} &= 598{,}9883\ {}^0/_{00}\\
a_{40,\overline{20}|} &= \quad 12{,}98166\\
\gamma \cdot a^{>}_{40,\overline{15}|} &= \quad\ \ 0{,}23075\\
\varepsilon \cdot a'_{40,\overline{20}|} &= \quad\ \ 5{,}88441\\
\hline
\text{Nenner} &= \quad\ \ 6{,}86650\\
\mathfrak{P}^{>} &= \quad 87{,}2334\ {}^0/_{00}
\end{aligned}$$

Wird auch hier wieder auf volle Markbeträge abgerundet, so ist eine Prämie von <u>88 ⁰/₀₀</u> festzusetzen.

Aufgabe 53

Es kann leicht geschehen, daß der Versicherungstechniker sich über Vorgänge der Art, wie sie in der Aufgabe 52 enthalten sind, zunächst nicht ganz klar ist. Er hilft sich dann am besten, indem er sich an künstlich gebildeten Zahlen ganz einfacher Art, und zwar womöglich an einem scharf ausgewählten Beispiel, die Unterschiede klar macht. Wie gestaltet sich zum Beispiel eine solche Untersuchung für die Aufgabe 52, wenn $n = 10$ gesetzt wird, und wenn einfach die ganzen natürlichen Zahlen von 10 bis 1 als diskontierte Zahlen der Lebenden vorausgesetzt werden? Als Diskontsatz kann dabei ebenfalls ein Satz von 3½% Geltung haben.

Den künstlich gebildeten Werten von D_x entsprechen bestimmte Werte von N_x und S_x, sowie auch bestimmte Werte von p_x und q_x und von E_x. Stellt man alle diese Werte zusammen, so erhält man folgende kleine Tafel der Grundwerte:

m	D_{x+m}	N_{x+m}	S_{x+m}	p_{x+m}	q_{x+m}	$_mE_x$
0	10	55	220	0,931500	0,068500	1,000000
1	9	45	165	0,920000	0,080000	0,900000
2	8	36	120	0,905625	0,094375	0,800000
3	7	28	84	0,887143	0,112857	0,700000
4	6	21	56	0,862500	0,137500	0,600000
5	5	15	35	0,828000	0,172000	0,500000
6	4	10	20	0,776250	0,223750	0,400000
7	3	6	10	0,690000	0,310000	0,300000
8	2	3	4	0,517500	0,482500	0,200000
9	1	1	1	0,000000	1,000000	0,100000
10	0	0	0			0,000000

Die Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten fallen also zwar etwas ungewöhnlich, aber durchaus nicht sinnwidrig aus.

Nimmt man nun an, die Prämie solle sich vom

3. Jahre an vermindern, so ergeben sich ohne weiteres die folgenden Werte:

$$
\begin{array}{rlrl}
 & & t = 2 & n = 10 \\
\Sigma D_x = N_x = 55 & & \Sigma\Sigma D_{x+t} = S_{x+t} = & 120 \\
\Sigma D_{x+n} = N_{x+10} = 0 & & \Sigma\Sigma D_{x+n} = S_{x+n} = & 0 \\
D_x = 10 & & (n-t)\,N_{x+n} = & 0 \\
\underline{a_{x,\overline{n}|} = 5{,}5} & & {}^t a'_{x,\overline{n}|} = & 12.
\end{array}
$$

Hier sei darauf aufmerksam gemacht, daß man den Wert

$S_{x+t} - S_{x+n} - (n-t)\,N_{x+n} = S_{x+t}^{x+n}$ [abgekürzte Schreibweise]

oft auch bequem durch Aufaddieren finden kann. Denn es ist doch:

$$S_{x+t}^{x+n} = 1 \cdot D_{x+t} + 2 \cdot D_{x+t+1} + 3 \cdot D_{x+t+2} + \ldots + (n-t)\,D_{x+n-1},$$

also hier:

$$S_{x+t}^{x+n} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 120.$$

Rechnet man nun mit einer Prämienminderung von 30% [das Beispiel soll scharf ausgeprägt sein!], so ergibt sich:

$$
\begin{array}{r}
\varepsilon = 0{,}30 \\
a_{x,\overline{n}|} = 5{,}5 \\
\underline{\varepsilon \cdot a'_{x,\overline{n}|} = 3{,}6} \\
a^{>}_{x,\overline{n}|} = 1{,}9\,.
\end{array}
$$

Wollte man die Inkassoprovision nach der Formel ($72\underline{k}$) [vgl. die Aufgabe (52)!] in die Prämie hineinrechnen, so hätte man zu wenig an Zuschlag erhoben. Denn es wird doch so gerechnet, als ob die Inkassoprovision schon vom 1. Jahre an zu zahlen wäre. Sie hat dann für die ersten beiden Prämien den Wert 1, für die 3. Prämie den Wert 0,7, für die 4. Prämie den Wert 0,4 und für die 5. Prämie den Wert 0,1. Das ergibt insgesamt den Betrag 3,2, wobei $\gamma \cdot \mathfrak{p}$ als Einheit angesehen wird. Dieser Betrag von 3,2 kann aber unmöglich zu 1,9 zusammenschrumpfen, wenn auch berück-

sichtigt wird, daß die Provisionen mit Ausnahme der ersten erst nach einer bestimmten Zeit und nur mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit fällig werden, wenn also die einzelnen Beträge mit den Barwerten ${}_mE_x$ multipliziert werden. Es ergibt sich dann nämlich der Wert:

$$1{,}0 \cdot 1 + 0{,}9 \cdot 1 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}1 = \underline{2{,}8}\,.$$

Nicht der Betrag $1{,}9 \cdot \gamma \cdot \mathfrak{p}$, sondern der Betrag $2{,}8 \cdot \gamma \cdot \mathfrak{p}$ muß also als Barwert des Zuschlages in die Rechnung eingestellt werden.

Die Inkassoprovision fällt nun weg vom 6. Jahre an. Also ist nach der Formel der Aufgabe 52 im vorliegenden Falle $k = 5$ zu setzen. Dann folgt weiter:

$$\begin{array}{rl} N_x = & 55 \\ N_{x+5} = & 15 \\ \hline \text{Diff.} = & 40 \\ D_x = & 10 \\ a_{x,\overline{k|}} = & \underline{4{,}0} \end{array} \qquad \begin{array}{rr} S_{x+t} = & 120 \\ S_{x+k} = & 35 \\ (k-t)\,N_{x+k} = & 45 \\ \hline \text{Diff.} = & 40 \\ {}^{t}a'_{x,\overline{k|}} = & \underline{4{,}0} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \text{oder auch:} \\ S_{x+t}^{x+k} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 \\ S_{x+t}^{x+k} = 40 \\ {}^{t}a'_{x,\overline{k|}} = \underline{4{,}0}\,. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \varepsilon = & 0{,}30 \\ a_{x,\overline{k|}} = & 4{,}0 \\ \varepsilon \cdot a'_{x,\overline{k|}} = & 1{,}2 \\ \hline \overset{>}{a}_{x,\overline{k|}} = & \underline{2{,}8}\,. \end{array}$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit dem vorher auf anderem Wege hergeleiteten Ergebnis. Die Formel ist also richtig. Außerdem ermöglicht das künstlich gebildete Zahlensystem einen leichten Einblick, ohne dabei irgendwie sinnwidrig zu werden.

Aufgabe 54

Ein 20jähriger will eine Versicherung auf Lebenszeit in der Weise abschließen, daß er lebenslänglich im voraus festgelegte alljährlich steigende Prämien entrichtet. Es soll ein Kapital von 25 000 Mk. versichert werden. Der Antragsteller will mit der Versicherung erreichen, daß er

in ähnlicher Weise versichert ist, wie wenn er die Versicherung zur natürlichen Prämie abgeschlossen hätte. Die Gesellschaft rechnet wegen der Gefährlichkeit der Versicherung mit erhöhten Aufschlägen, nämlich mit einem Aufschlage von 40 ‰ für einmalige Unkosten, von $2\frac{1}{2}$ ‰ für laufende Unkosten und von $3\frac{1}{2}$ % für Inkassokosten. Die Steigerung der Prämie soll schon im 2. Jahre beginnen. Welches ist die Anfangsprämie und um welchen Betrag erhöht sich die Prämie alljährlich, wenn ein Steigerungssatz von 3 % der Anfangsprämie vereinbart wird? Wie hoch darf der Steigerungssatz äußersten Falles bemessen werden? [Formeln (81), (87) und (91)].

$$\begin{aligned} N_{20} &= 1\,031\,102{,}57 \\ D_{20} &= 50\,256{,}59 \\ a_{20} &= 20{,}5167(6) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} S_{21} &= 16\,516\,469{,}42 \\ D_{20} &= 50\,256{,}59 \\ a'_{20} &= 328{,}6428(6) \\ \varepsilon &= 0{,}03 \\ \varepsilon \cdot a'_{20} &= 9{,}8592(9) \\ a_{20} &= 20{,}5167(6) \\ \hline a_{20}^{<} &= 30{,}3760(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{20} &= 15\,388{,}3833 \\ D_{20} &= 50\,256{,}59 \\ A_{20} &= 0{,}306\,196(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 306{,}1963\ ‰ \\ \alpha &= 40{,}0000\ ‰ \\ \beta \cdot a &= 51{,}2919\ ‰ \\ \hline \text{Zähler} &= 397{,}4882\ ‰ \\ (1-\gamma)a^{<} = \text{Nenner} &= 29{,}31289 \\ \mathfrak{P}^{<} &= \underline{13{,}5602\ ‰}. \end{aligned}$$

Die erste Jahresprämie stellt sich auf 13,60 ‰, also auf 340 Mk. für 25 000 Mk. Versicherungssumme. Die Prämie hätte sich dann vom 2. Jahre an alljährlich um je 10,20 Mk. zu erhöhen. Da die Aufschläge reichlich bemessen sind, kann die Gesellschaft statt dessen aber aus Bequemlichkeitsgründen auch eine Erhöhung von je 10 Mk. festsetzen. Geschieht das, so beträgt die Prämie des 30. Versicherungsjahres schon 630 Mk., und wenn der Versicherte etwa 90 Jahre alt werden sollte,

so hätte er dann eine Prämie von mehr als 1000 Mk. zu zahlen. Wirtschaftlich vorteilhaft ist eine solche Versicherung also nicht, wenngleich die Prämien nicht so stark steigen, wie das der Fall wäre, wenn die Versicherung zur natürlichen Prämie abgeschlossen worden wäre.

Zur Ermittlung des äußersten Steigerungssatzes ist die Risikoprämie des Eintrittsalters zu berechnen.

$$C_{20} = v^{21} \cdot d_{20}$$
$$v^{21} = 0{,}485\,571$$
$$d_{20} = 919$$
$$C_{20} = 446{,}24$$
$$D_{20} = 50\,256{,}59$$
$$\Pi_{20} = 0{,}0088\,792(3).$$

Die Risikoprämie des Eintrittsjahres beläuft sich auf 8,8792 ‰.

$$a' \cdot \Pi = 2918{,}10\ ‰$$
$$\frac{A}{a' \cdot \Pi} = 0{,}10\,493$$
$$\frac{a}{a'} = 0{,}06\,243$$
$$\text{Diff.} = 0{,}04\,250 = \varepsilon.$$

Es darf also höchstens gerade noch ein Steigerungssatz von $4^1/_4$ % festgesetzt werden. In der Tat ergibt sich, wenn dieser Satz zugrunde gelegt wird:

$$\varepsilon = 0{,}0425$$
$$a'_{20} = 328{,}6428(6)$$
$$\varepsilon \cdot a'_{20} = 13{,}96\,732$$
$$a_{20} = 20{,}51\,676$$
$$a^{<}_{20} = 34{,}48\,408$$
$$A_{20} = 306{,}1963\ ‰$$
$$P^{<}_{20} = 8{,}8793(5)\ ‰.$$

Dieser Betrag stimmt mit der Risikoprämie des Eintrittsjahres fast genau überein.

Aufgabe 55

Auf das Leben eines 30jährigen soll eine gemischte Versicherung mit 25jähriger Versicherungsdauer abgeschlossen werden. Die Versicherung soll am Geschäftsgewinn beteiligt sein. Die Gesellschaft rechnet mit einem Aufschlag von 20 $^0/_{00}$ für Abschlußkosten und fügt zu der mit diesem Aufschlag versehenen Nettoprämie noch einen Zuschlag von 10 % hinzu. Die damit gewonnene Bruttoprämie, die am Geschäftsgewinn nicht beteiligt wäre, wird abermals um 10 % erhöht. Die gewinnberechtigte Prämie ist also zu berechnen nach der Formel $\mathfrak{G} = 1{,}10\left[1{,}10\left(P + \frac{\alpha}{a}\right)\right]$. Es sollen 10 000 Mk. versichert werden. Welche Jahresprämien ergeben sich, wenn die Versicherung entweder mit unveränderlicher Vertragsprämie abgeschlossen wird, oder wenn sie so abgeschlossen wird, daß sich die Vertragsprämie vom 4. Jahre an dauernd um 20 % ermäßigt oder erhöht? [Formel (90)].

$$A_{30,\overline{25|}} = 483{,}3898\ ^0/_{00}$$
$$a_{30,\overline{25|}} = 15{,}27690$$
$$A + \alpha = 503{,}3898\ ^0/_{00}$$
$$P + \frac{\alpha}{a} = 32{,}9510\ (4)\ ^0/_{00}$$
$$\underline{\mathfrak{p} = 36{,}2461\ ^0/_{00}} \text{ (ohne Gewinnbeteiligung),}$$
$$\underline{\mathfrak{G} = 39{,}8707\ ^0/_{00}} \text{ (mit Gewinnbeteiligung).}$$

Es sei angenommen, die Gesellschaft habe nicht eine Prämie von 39,90 $^0/_{00}$, sondern [etwa des besseren Verlaufes der Prämiensätze wegen] eine gewinnberechtigte Prämie von 40 $^0/_{00}$ festgesetzt. Es ist dann zunächst eine Jahresprämie von 400 Mk. zu zahlen, auf die z. B. vom 4. Jahre an Gewinnanteile verrechnet werden. Die Vertragsprämie bleibt dabei aber unverändert. An „Vertragsprämien“ ist dann also im ganzen höchstens gerade

die Versicherungssumme einzuzahlen. An „Barprämien" aber wird erheblich weniger aufzuwenden sein. Man kann annehmen, daß bei günstiger Wirtschaftslage höchstens nur etwa drei Viertel der Versicherungssumme an Prämien aufzuwenden sein wird, wenn die Gewinnanteile nicht lange zurückgehalten, sondern möglichst bald angerechnet werden.

Weiter ergibt sich:

$$t = 3$$
$$\varrho = 0{,}20$$

Anmerkung. $a_{30,\overline{3}|}$ ist aus den Grundwerten zu berechnen!

$$\begin{aligned} a_{30,\overline{3}|} &= 2{,}87459(5) \\ (1-\varrho)\cdot a_{30,\overline{25}|} &= 12{,}22152 \\ \varrho\cdot a_{30,\overline{3}|} &= \underline{0{,}57492} \\ \text{Summe} = a^{>}_{30,\overline{25}|} &= 12{,}79644 \end{aligned}$$

$$A + \alpha = 503{,}3898\ ^0/_{00}$$

$$P^{>} + \frac{\alpha}{a^{>}} = 39{,}3383\ ^0/_{00}$$

$\underline{\mathfrak{P}^{>} = 43{,}2721\ ^0/_{00}}$ (ohne Gewinnbeteiligung),

$\underline{\mathfrak{G}^{>} = 47{,}5993\ ^0/_{00}}$ (mit Gewinnbeteiligung).

Die gewinnberechtigte Prämie ist also auf $\underline{47{,}60\ ^0/_{00}}$ festzusetzen. Es ist mithin für 10 000 Mk. Kapital eine Jahresprämie von <u>476 Mk.</u> zu zahlen, die sich vom 4. Jahre an vertraglich auf <u>380,80 Mk.</u> und außerdem noch um die auf die Versicherung anzurechnenden Gewinnanteile ermäßigt.

Endlich ergibt sich noch:

$$\begin{aligned} t &= 3 \\ \varrho &= 0{,}20 \\ a_{30,\overline{3}|} &= 2{,}87459(5) \\ (1+\varrho)\cdot a_{30,\overline{25}|} &= 18{,}33228 \\ \varrho\cdot a_{30,\overline{3}|} &= \underline{0{,}57492} \\ \text{Diff.} = a^{<}_{30,\overline{25}|} &= 17{,}75736 \end{aligned}$$

$$A + \alpha = 503{,}3898\,^0/_{00}$$

$$P^{<} + \frac{\alpha}{a^{<}} = 28{,}3482\,^0/_{00}$$

$\underline{\mathfrak{p}^{<} = 31{,}1830\,^0/_{00}}$ (ohne Gewinnbeteiligung),

$\underline{\mathfrak{G}^{<} = 34{,}3013\,^0/_{00}}$ (mit Gewinnbeteiligung) .

Hier sei ein Prämiensatz von $\underline{34{,}40\,^0/_{00}}$ festgesetzt. Es ist dann eine Anfangsprämie von $\underline{344 \text{ Mk.}}$ zu zahlen, die sich vom 4. Jahre an vertraglich auf $\underline{412{,}80 \text{ Mk.}}$ erhöht, aber um die auf die Versicherung anzurechnende „Dividende" ermäßigt.

Aufgabe 56

Angenommen, die in dem Beispiel der Aufgabe 55 behandelte Versicherung solle zur gleichbleibenden Vertragsprämie abgeschlossen werden, und es betrage die vom 4. Jahre an auf die Versicherung anzurechnende „Dividende" dauernd 25% der vollen Prämie. Der Versicherungsnehmer wird dann vom 4. Jahre an nur noch eine ermäßigte Prämie [eine „Barprämie"] von 300 Mk. zu zahlen haben. Der Versicherungsnehmer zieht es nun vor, den Jahresgewinn nicht auf die Prämie anrechnen zu lassen, sondern ihn der Gesellschaft als Zusatzprämie für die Mitversicherung einer steigenden Rente zu überlassen. Die Rente soll vom 4. Jahre an gezahlt werden und mit der Prämienzahlungsdauer ihr Ende erreichen; sie soll im 4. Versicherungsjahr mit dem einfachen Betrage, im 5. Versicherungsjahr mit dem doppelten Betrage, im 6. Versicherungsjahr mit dem dreifachen Betrag gezahlt werden usw.

Wie hoch ist die erste Rente und wie verläuft die Prämienzahlung, wenn angenommen wird, daß der Gewinnsatz von 25% unverändert Geltung behält? [Formel (83)].

Zu beachten ist, daß es sich hier nicht um eine aufgeschobene Rente handelt, daß vielmehr die Zusatzversicherung erst nach 3 Jahren in Wirkung tritt. Es ist also:

$$\begin{aligned} S_{33} &= 7\,512\,993{,}76 \\ S_{55} &= 1\,072\,285{,}79 \\ 22 \cdot N_{55} &= 2\,551\,262{,}19 \\ \hline \text{Diff.} &= 3\,889\,445{,}78 \\ D_{33} &= \quad 28\,638{,}38 \\ a^{<1}_{33,\overline{22}|} &= \quad 135{,}8124\,. \end{aligned}$$

Das ist der Barwert, aus dem im 1. Jahre die Rente 1, im 2. Jahre die Rente 2, im 3. Jahre die Rente 3 usw., im 22. Jahre also die Rente 22 gezahlt werden kann. Die Richtigkeit der Größenordnung des Barwertes prüft man, indem man den Gesamtbetrag aller Renten ermittelt. Es ist:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + 22 = \frac{22 \cdot 23}{2} = 253\,.$$

Die Größenordnung des Barwertes ist also richtig. [Der Barwert macht bei mittlerem Eintrittsalter und mittlerer Dauer etwa die Hälfte des Gesamtbetrages aller Renten aus].

Für die mitversicherte Rente werden Jahresprämien entrichtet. Also ergibt sich:

$$\begin{aligned} a^{<1}_{33,\overline{22}|} &= 135{,}8124 \\ a_{33,\overline{22}|} &= \quad 14{,}12975 \\ ZP &= \quad 9{,}6118 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{33} &= 520\,619{,}50 \\ N_{55} &= 115\,966{,}46(3) \\ \hline \text{Diff.} &= 404\,653\,03(7) \\ D_{33} &= \quad 28\,638{,}38\,. \end{aligned}$$

Mit ZP ist die Nettozusatzprämie bezeichnet. Sie gilt für die Anfangsrente 1. Der Zuschlag braucht nur geringfügiger Art zu sein. Wenn er die Inkassokosten deckt, ist er meist schon ausreichend bemessen. Es sei hier gerechnet mit einem Aufschlage von 3½% der Bruttozusatzprämie. Dann ist:

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{P} = \frac{ZP}{0{,}965} = 9{,}9604\,.$$

Für die Einheit der Anfangsrente ergibt sich also eine Zusatzprämie von 10 Mk. Da der Versicherte 25% von 400 Mk., also einen Betrag von 100 Mk. alljährlich für die Zusatzversicherung aufwendet [wenn der Gewinnanteil einmal nicht ausreichen sollte, muß das Fehlende draufgelegt werden], so kann gerade eine Anfangsrente von 10 Mk. versichert werden. Die Prämienzahlung gestaltet sich dann folgendermaßen:

In den ersten 3 Jahren werden je 400 Mk. eingezahlt. Im 4. Jahre ermäßigt sich die Prämie auf 390 Mk., im 5. Jahre auf 380 Mk., im 6. Jahre auf 370 Mk. usw. Im letzten Versicherungsjahr ist nur noch eine Barprämie von 180 Mk. zu entrichten.

Die Gesamtleistung kann auf zweierlei Weise ermittelt werden. [Vgl. die Aufgabe 50!].

I.
$$S = 25 \cdot 400 \text{ Mk.} - \frac{22 \cdot 23}{2} \cdot 10 \text{ Mk.}$$
$$S = 10\,000 \text{ Mk.} - 2530 \text{ Mk.} = \underline{7470 \text{ Mk.}}$$

II.

$$\begin{array}{rl}
\underline{m = 23} & \\
a = & 400 \\
z = & 180 \\
\hline
a + z = & 580 \\
\frac{m}{2} = & 11{,}5 \\
S' = & 6670 \text{ Mk.} \\
2\,\mathfrak{p} = & 800 \text{ Mk.} \\
\hline
S = & \underline{7470 \text{ Mk.}}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rl}
\underline{m = 22} & \\
a = & 390 \\
z = & 180 \\
\hline
a + z = & 570 \\
\frac{m}{2} = & 11 \\
S' = & 6270 \text{ Mk.} \\
3\,\mathfrak{p} = & 1200 \text{ Mk.} \\
\hline
S = & \underline{7470 \text{ Mk.}}
\end{array}$$

Hätte sich der Versicherte die Gewinnanteile vom 4. Jahre an voll anrechnen lassen, so hätte er 3mal je 400 Mk. und 22mal je 300 Mk., im ganzen 7800 Mk.

aufwenden müssen. Die Form der steigenden Rente ist scheinbar günstiger. Es ist jedoch zu beachten, daß dabei vom 4. Jahre an zunächst höhere Prämien zu zahlen sind und daß dabei ein Teil der bereits fällig gewordenen Gewinnanteile verloren geht, wenn der Versicherte stirbt. Im Erlebensfalle hat er dann natürlich den Vorteil der besseren Verzinsung.

Aufgabe 57

Die in der Aufgabe 55 behandelte Versicherung wird von einer Rückversicherungsgesellschaft in folgender Form zur weiteren Rückdeckung angeboten:

Die Prämie soll 38.— $^0/_{00}$ betragen, in den ersten 3 Jahren aber um 20 % ermäßigt werden. Es soll eine Abschlußprovision von 25 $^0/_{00}$ und vom 2. Jahre an eine Inkassoprovision von 6 % vergütet werden.

Die angebotene Prämie ist darauf hin zu prüfen, ob sie als ausreichend angesehen werden kann.

Zu beachten ist, daß hier nicht die Anfangsprämie $\mathfrak{p}^{<}$, sondern die abgeänderte Prämie $\mathfrak{p}^{\vdash\!\dashv}$ angegeben ist. Es wäre also falsch, wenn man $\varrho = 0{,}20$ setzen wollte. Es ist vielmehr:

$$\mathfrak{p}^{<}[1+\varrho] = \mathfrak{p}^{\vdash\!\dashv}, \qquad \text{also:}$$

$$\begin{aligned}
\varrho &= \frac{\mathfrak{p}^{\vdash\!\dashv}}{\mathfrak{p}^{<}} - 1 \\
\mathfrak{p}^{\vdash\!\dashv} &= 38.\text{—}\ ^0/_{00} \\
\mathfrak{p}^{<} &= 30{,}40\ ^0/_{00} \\
1+\varrho &= 1{,}25 \\
\varrho &= 0{,}25 \\
A_{30,\overline{25}|} &= 483{,}3898\ ^0/_{00} \\
a &= \ \ 25{,}0000\ ^0/_{00} \\
\hline
A + a &= 508{,}3898\ ^0/_{00}.
\end{aligned}$$

Bei der Berechnung des Barwertes der Inkassovergütungen ist acht zu geben. Man pflegt im allgemeinen so zu rechnen, als seien die Inkassovergütungen gleich von Anfang an zu zahlen. Man kann jedoch sehr wohl auch berücksichtigen, daß sie erst vom zweiten Jahre an zu zahlen sind. Dann fällt die erste Inkassovergütung weg. Man hat also den Satz der Inkassoprovision nicht mit dem vollen Barwert a, sondern nur mit dem Barwert (a — 1) zu multiplizieren. Ferner ist im vorliegenden Falle zu beachten, daß der Betrag, aus dem die Provision gezahlt werden soll, bereits festgelegt ist. Es wäre also nicht richtig, wenn man nach der Formel

$$\mathfrak{p} = \frac{A + \alpha}{(1 - \gamma)\, a}$$

rechnen wollte.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{p}$ die gegebene Prämie und mit $\mathfrak{p}^0$ die notwendige Prämie, so ist vielmehr allgemein:

$$\mathfrak{p}^0 = \frac{A + \alpha + \gamma \cdot a \cdot \mathfrak{p}}{a},$$

in dem hier gegebenen Beispiel also:

$$\mathfrak{p}^{0<} = \frac{A + \alpha + \gamma\,(a^< - 1) \cdot \mathfrak{p}^<}{a^<}$$

oder auch:

$$\mathfrak{p}^{0<} = P^< + \frac{\alpha}{a^<} + \gamma \cdot \left(\frac{a^< - 1}{a^<}\right) \cdot \mathfrak{p}^<,$$

wenn die Inkassoprovision genau eingerechnet werden soll. Es ist also weiter:

$$\begin{aligned}
a_{30,\overline{25}|} &= 15{,}27690 \\
\varrho &= 0{,}25 \\
a_{30,\overline{3}|} &= 2{,}87459(5) \\
\varrho \cdot a_{30,\overline{3}|} &= 0{,}71865 \\
(1 + \varrho) \cdot a_{30,\overline{25}|} &= 19{,}09612 \\
\hline
\text{Diff.} = a^<_{30,\overline{25}|} &= 18{,}37747
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot \mathfrak{p}^{<} &= 1{,}824\ {}^0/_{00}\\
\gamma \cdot \mathfrak{p}^{<} \cdot (a^{<} - 1) &= 31{,}6965\ {}^0/_{00}\\
A + \alpha &= 508{,}3898\ {}^0/_{00}\\
\hline
\text{Zähler} &= 540{,}0863\ {}^0/_{00}\\
\text{Nenner} &= 18{,}37747\\
\mathfrak{p}^{0<} &= 29{,}3885\ {}^0/_{00}\\
\mathfrak{p}^{<} &= 30{,}4000\ {}^0/_{00}\\
\hline
\text{Unterschied} &= 1{,}0115\ {}^0/_{00}\,.
\end{aligned}$$

Die angebotene Prämie ist um etwa 3½% höher als die notwendige Prämie. Es bleibt also immer noch ein angemessener Aufschlag zur Deckung der laufenden Unkosten übrig [anfangs ein Aufschlag von 1,01 ${}^0/_{00}$, vom 4. Jahre an ein Aufschlag von 1,26 ${}^0/_{00}$]. Die Versicherung kann mithin glatt in Rückdeckung übernommen werden.

Geht man von der Nettojahresprämie aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
A_{30,\overline{25}|} &= 483{,}3898\ {}^0/_{00}\\
a^{<}_{30,\overline{25}|} &= 18{,}37747\\
P^{<}_{30,\overline{25}|} &= 26{,}3034\ {}^0/_{00}\\
\frac{\alpha}{a^{<}} &= 1{,}3604\ {}^0/_{00}\\
\gamma \cdot \frac{a^{<} - 1}{a^{<}} \cdot \mathfrak{p}^{<} &= 1{,}7247\ {}^0/_{00}\\
\hline
\mathfrak{p}^{0<} &= \underline{29{,}3885\ {}^0/_{00}}\,, \text{ wie vorher.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a^{<} - 1) &= 17{,}37747\\
a &= 18{,}37747\\
\hline
\text{Quotient} &= 0{,}945\,58\,(6)\,.
\end{aligned}$$

Man kann die Rechnung auch so gestalten, daß sie sofort auf die später zu zahlende Prämie führt. Man hat dann nur den Rentenbarwert anders zu bestimmen. Man geht aus von der Prämie $\mathfrak{p}^{\vdash\!\dashv}$ und berücksichtigt, daß diese Prämie in den ersten drei Jahren um den Satz ϱ' ermäßigt sein soll. Es ist dann:

$$\overset{\vdash\!\dashv}{a}_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{n}|} - \varrho' \cdot a_{x,\overline{3}|} \, .$$

Man erhält also für das vorliegende Beispiel:

$$\begin{aligned}
\varrho' &= 0{,}20 \\
a_{30,\overline{3}|} &= 2{,}87459(5) \\
\varrho' \cdot a_{30,\overline{3}|} &= 0{,}57492 \\
a_{30,\overline{25}|} &= 15{,}27690 \\
\hline
\overset{\vdash\!\dashv}{a}_{30,\overline{25}|} &= 14{,}70198 \\
A_{30,\overline{25}|} &= 483{,}3898\ {}^0/_{00} \\
P^{\vdash\!\dashv}_{30,\overline{25}|} &= \underline{32{,}8792\ {}^0/_{00}}\, , \qquad \text{also:} \\
P^{<} = (1-\varrho') \cdot P^{\vdash\!\dashv} &= \underline{\underline{26{,}3034\ {}^0/_{00}}}\, ,
\end{aligned}$$

was mit dem vorher gefundenen Wert übereinstimmt. Will man in dieser Weise die notwendige Prämie berechnen, so muß man selbstverständlich von der später zu zahlenden Inkassovergütung ausgehen, und man darf für die Bemessung des Barwertes der Inkassovergütungen den Rentenbarwert $a^{\vdash\!\dashv}$ nicht um die Einheit, sondern nur um den Betrag $(1-\varrho')$ vermindern. Die Berechnung gestaltet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\gamma \cdot \mathfrak{p}^{\vdash\!\dashv} &= 2{,}280\ {}^0/_{00} \\
a^{\vdash\!\dashv} &= 14{,}70198 \\
[a^{\vdash\!\dashv} - (1-\varrho')] &= 13{,}90198 = h \\
\gamma \cdot \mathfrak{p}^{\vdash\!\dashv} \cdot h &= 31{,}6965\ {}^0/_{00} \\
A + \alpha &= 508{,}3898\ {}^0/_{00} \\
\hline
\text{Summe} &= 540{,}0863\ {}^0/_{00}\ \text{[wie vorher]} \\
a^{\vdash\!\dashv} &= 14{,}70198 \\
\mathfrak{p}^{0\vdash\!\dashv} &= \underline{36{,}7356\ {}^0/_{00}}\, , \qquad \text{also:} \\
\mathfrak{p}^{0<} = (1-\varrho') \cdot \mathfrak{p}^{0\vdash\!\dashv} &= \underline{29{,}3885\ {}^0/_{00}}\, ,
\end{aligned}$$

was wieder mit dem vorher gefundenen Wert übereinstimmt.

Aufgabe 58

Auf das Leben eines 39jährigen wird eine gemischte Versicherung mit 20jähriger Dauer in der Weise abgeschlossen, daß eine Summe von 30 000 Mk. fällig werden soll, wenn der Versicherte während der ersten 10 Jahre stirbt, oder wenn er den Endtermin erlebt. Stirbt der Versicherte dagegen während der zweiten Hälfte der Versicherungsdauer, so erhöht sich die Versicherungssumme für jedes angefangene Versicherungsjahr der zweiten Hälfte um 10 % des ursprünglichen Betrages, sodaß sie also im letzten Versicherungsjahre gerade das doppelte der ursprünglichen Summe ausmacht. Wegen der Gefährlichkeit des Wagnisses rechnet die Gesellschaft mit dem hohen Aufschlage von 20 % der Nettoprämie, woraus dann auch alle Verwaltungskosten zu decken sein sollen. Die Jahresprämie soll genau so abgestuft sein wie die Sterbfallsumme: sie soll also 10 Jahre hindurch unverändert bleiben und sich dann von Jahr zu Jahr um 10 % ihres ursprünglichen Betrages erhöhen, im letzten Jahre also doppelt so viel ausmachen wie zu Anfang. Wie verläuft die Prämienzahlung? [Formeln ($75^{\underline{a}}$), ($79^{\underline{b}}$) und (96)].

$$\begin{array}{rl} M_{39} = & 9\,525{,}3095 \\ M_{59} = & 4\,877{,}7663 \\ \hline \text{Diff.} = & 4\,647{,}5432 \\ D_{59} = & 7\,592{,}540 \\ \hline \text{Summe} = & 12\,240{,}083(2) \end{array} \qquad \begin{array}{rl} R_{49} = & 119\,543{,}3233 \\ R_{59} = & 57\,802{,}1872 \\ 10 \cdot M_{59} = & 48\,777{,}6630 \\ \hline \text{Diff.} = & 12\,963{,}4731 \end{array}$$

$$D_{39} = 21\,913{,}69 \qquad\qquad D_{39} = 21\,913{,}69$$

$$A_{39,\overline{20}|} = 0{,}558\,559 \qquad\qquad {}^{10}A'_{39,\overline{20}|} = 0{,}591\,570$$

$$\varepsilon = 0{,}10$$

$$\begin{array}{rl} A = & 558{,}559\ {}^0/_{00} \\ \varepsilon \cdot A' = & 59{,}157\ {}^0/_{00} \\ \hline \text{Summe} = A^{<} = & 617{,}716\ {}^0/_{00} = \text{Zähler}\ . \end{array}$$

$$N_{39} = 366\,341{,}99 \qquad S_{49} = 2\,006\,922{,}07$$
$$N_{59} = 80\,279{,}73 \qquad S_{59} = 664\,693{,}24$$
$$\text{Diff.} = 286\,062{,}26 \qquad 10 \cdot N_{59} = 802\,797{,}30$$
$$\text{Diff.} = 539\,431{,}53$$
$$D_{39} = 21\,913{,}69 \qquad D_{39} = 21\,913{,}69$$
$$a_{39,\overline{20}|} = 13{,}05404 \qquad {}^{10}a'_{39,\overline{20}|} = 24{,}61619$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0{,}10 \\ a &= 13{,}05\,404 \\ \varepsilon \cdot a' &= 2{,}46\,162 \\ \hline \text{Summe} = a^{<} &= 15{,}51\,566 = \text{Nenner}\,. \\ P^{<} &= \underline{39{,}8124\ ^0/_{00}} \\ 1{,}20 \cdot P^{<} = \mathfrak{p}^{<} &= \underline{\underline{47{,}7749\ ^0/_{00}}}\,. \end{aligned}$$

Wird aus Bequemlichkeitsgründen [was bei einer nicht tarifmäßig abgeschlossenen Versicherung unbedenklich ist] ein Prämiensatz von $\underline{48\ ^0/_{00}}$ festgesetzt, so ist während der ersten 10 Jahre eine Prämie von je 1440 Mk. zu entrichten, die sich vom 11. Jahre an alljährlich um je 144 Mk. erhöht. Im ganzen ergibt sich eine Einzahlung von

$$20 \cdot 1440 \text{ Mk.} + \frac{10 \cdot 11}{2} \cdot 144 \text{ Mk.} = \underline{\underline{36\,720 \text{ Mk.}}}$$

Die Versicherung ist, wie das nicht anders zu erwarten war, ziemlich kostspielig, weil ein außergewöhnliches Wagnis zu decken ist. Trotzdem ist die Versicherung nicht besonders empfehlenswert.

Aufgabe 59

Ein 30jähriger Kaufmann will für eine auf das 65. Lebensjahr abgekürzte gemischte Versicherung die Jahresprämie der von ihm erwarteten Erwerbsfähigkeit anpassen. Er nimmt an, daß er sein Einkommen bis zum 50. Lebensjahr alljährlich um 10 % des Anfangseinkommens werde steigern können, sodaß er also nach 20 Jahren über das dreifache Einkommen verfügen

werde. Dann aber glaubt er, seine Erwerbstätigkeit allmählich mindern zu müssen, derart, daß das Einkommen sich dann alljährlich um 20% des Anfangsbetrages verringert. Wenn er 65 Jahre alt ist, will er sich dann zur Ruhe setzen. Dementsprechend soll die Prämie abgestuft sein. Wie verläuft die Prämienzahlung für eine Versicherungssumme von 20 000 Mk., wenn die Gesellschaft einfach mit einem Aufschlag von 14% der Bruttoprämie rechnet? [Formeln (79) [erweitert] und (75b)].

Der zur Berechnung der Nettoprämie zu verwendende Rentenbarwert muß besonders bestimmt werden. Er setzt sich zusammen aus den Zusatzbarwerten einer steigenden und einer fallenden Rente. Wird mit ε die Steigerung bezeichnet, und beginnt die Steigerung nach m Jahren, so ist zunächst

$$^{m}a^{<\varepsilon} = a + \varepsilon \cdot {}^{m}a'.$$

Soll die Steigerung nach t Jahren ihr Ende erreichen, so muß sie zunächst dadurch wieder aufgehoben werden, daß der Barwert $\varepsilon \cdot {}^{t}a'$ abgezogen wird. Dann bliebe die Rente fernerhin unverändert. Soll sie sogar abnehmen, so muß der negative Zusatzbarwert entsprechend erhöht werden, indem ein neuer Steigerungssatz η den ersten Steigerungssatz nicht nur aufhebt, sondern sogar umkehrt. Ist ε der gegebene Steigerungssatz, ε' der gegebene Minderungssatz, so muß also $\eta = \varepsilon + \varepsilon'$ sein. Es ergibt sich dann der Rentenbarwert:

$$a^{<>} = a + \varepsilon \cdot {}^{m}a' - \eta \cdot {}^{t}a'. \tag{79c}$$

Wird dabei $\varepsilon = \eta$, so liegt der besondere Fall vor, daß die Rente nach t Jahren aufhört, sich zu verändern.

Im vorliegenden Falle ergibt sich:

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ t &= 21 \qquad [\text{nicht: } t = 20!] \\ \varepsilon &= 0{,}10 \\ \varepsilon' &= 0{,}20 \\ \hline \eta &= 0{,}30 \end{aligned}$$

$$A_{30,\overline{35}|} = 406{,}5876\ ^0/_{00}$$
$$a_{30,\overline{35}|} = 17{,}54805$$
$$P_{30,\overline{35}|} = 23{,}16996\ ^0/_{00}$$

$S_{31} =$	8 645 312,77	$S_{51} =$	1 645 644,27
$S_{65} =$	287 186,89	$S_{65} =$	287 186,89
$34 \cdot N_{65} =$	1 423 403,40	$14 \cdot N_{65} =$	586 107,28
Diff. =	6 934 722 48	Diff. =	772 350,10
$D_{30} =$	32 627,26	$D_{30} =$	32 627,26
${}^{m}a' =$	212,5438 (2)	${}^{t}a' =$	23,67193

$$a_{30,\overline{35}|} = 17{,}54\,805$$
$$\varepsilon \cdot {}^{m}a'_{30,\overline{35}|} = 21{,}25\,438$$
$$\text{Summe} = 38{,}80\,243$$
$$\eta \cdot {}^{t}a'_{30,\overline{35}|} = 7{,}10\,158$$
$$a^{<>}_{30,\overline{35}|} = \text{Diff.} = 31{,}70\,085$$
$$A_{30,\overline{35}|} = 406{,}5876\ ^0/_{00}$$
$$P^{<>}_{30,\overline{35}|} = 12{,}8258\ ^0/_{00}$$
$$\frac{P^{<>}_{30,\overline{35}|}}{0{,}86} = \mathfrak{P}^{<>}_{30,\overline{35}|} = 14{,}9137\ ^0/_{00} \qquad \underline{15{,}\text{—}\ ^0/_{00}}\,.$$

Es ist eine Anfangsprämie von 300 Mk. für 20 000 Mk. Versicherungssumme festzusetzen. Diese Prämie erhöht sich vom 2. Jahre an alljährlich um 30 Mk., bis sie auf 900 Mk. gestiegen ist, wenn der Versicherte 50 Jahre alt geworden ist, wenn er also die Prämie des 21. Versicherungsjahres entrichtet. Alsdann ermäßigt sich die Prämie alljährlich um 60 Mk., und sie wird von selbst zu null, wenn die Versicherungsdauer abläuft. Die Gesamtleistung berechnet man am besten folgendermaßen:

$$S = 35 \cdot 300 \text{ Mk.} + \frac{34 \cdot 35}{2} \cdot 30 \text{ Mk.} - \frac{14 \cdot 15}{2} \cdot 90 \text{ Mk.}$$

[an letzter Stelle nicht: 60 Mk.!]

$$S = 10\,500 \text{ Mk.} + 17\,850 \text{ Mk.} - 9\,450 \text{ Mk.} = \underline{18\,900 \text{ Mk.}}$$

Wäre die Versicherung mit gleichbleibender Vertragsprämie abgeschlossen worden, so hätte sich ergeben:

$$P_{30,\overline{35}|} = 23{,}16996$$

$$\frac{P_{30,\overline{35}|}}{0{,}86} = \mathfrak{P}_{30,\overline{35}|} = 26{,}9418 \qquad \underline{27{,}- \,^0/_{00}}.$$

Es wäre dann also eine feste Jahresprämie von 540 Mk. festzusetzen gewesen, und es hätte sich (zufällig) auch in diesem Falle eine Gesamtleistung von 18 900 Mk. ergeben. Der wirtschaftliche Vorteil der ersten Form liegt auf der Hand: es kann für eine geringe Anfangsprämie ein hohes Kapital versichert werden, die Belastung ist am größten, wenn die Schaffenskraft des Versicherten ihren Höhepunkt erreicht, und sie nimmt dann mit steigendem Alter schnell wieder ab.

Aufgabe 60

Wie ändert sich der Verlauf der Prämienzahlung, wenn in dem Beispiel der Aufgabe 59 die Bedingung so gestellt werden soll, daß die Prämie sich vom 50. Lebensjahre an nicht verringern, sondern daß sie dann unverändert bleiben soll?

Es liegt dann der besondere Fall vor, daß $\varepsilon = \eta$ ist. Also ergibt sich:

$$a^{<} = a + \varepsilon\,[{}^{m}a' - {}^{t}a'] .$$

$$\begin{aligned}
{}^{m}a'_{30,\overline{35}|} &= 212{,}5438\,(2)\\
{}^{t}a'_{30,\overline{35}|} &= 23{,}6719\,(3)\\
\hline
\text{Diff.} &= 188{,}8718\,(9) = h\\
\varepsilon \cdot h &= 18{,}88719\\
a_{30,\overline{35}|} &= 17{,}54805\\
\hline
\text{Summe} = a^{<}_{30,\overline{35}|} &= 36{,}43524\\
A_{30,\overline{35}|} &= 406{,}5876\,^0/_{00}\\
P^{<}_{30,\overline{35}|} &= 11{,}1592\,^0/_{00}
\end{aligned}$$

$$\frac{P^{<}_{30,\overline{35}|}}{0{,}86} = \mathfrak{P}^{<}_{30,\overline{35}|} = 12{,}9758\,^0/_{00} \qquad \underline{13{,}- \,^0/_{00}}.$$

Hier wäre also nur eine Anfangsprämie von <u>260 Mk.</u> erforderlich. Diese Prämie hätte sich alljährlich um <u>26 Mk.</u> zu erhöhen, bis sie nach 20 Jahren ihren höchsten Betrag erreichte. Dieser Betrag von <u>780 Mk.</u> [statt 900 Mk.] wäre dann fernerhin unverändert weiter zu zahlen. Die Gesamteinzahlung muß natürlich höher ausfallen, als in dem Beispiel der Aufgabe 59. Es ist:

$$S = 35 \cdot 260 \text{ Mk.} + \frac{34 \cdot 35}{2} \cdot 26 \text{ Mk.} - \frac{14 \cdot 15}{2} \cdot 26 \text{ Mk.}\,,$$

$$S = 9100 \text{ Mk.} + 15\,470 \text{ Mk.} - 2730 \text{ Mk.} = \underline{21\,840 \text{ Mk.}}$$

oder:

$$S = 35 \cdot 260 \text{ Mk.} + \frac{19 \cdot 20}{2} \cdot 26 \text{ Mk.} + 15 \cdot 520 \text{ Mk.}\,,$$

$$S = 9100 \text{ Mk.} + 4940 \text{ Mk.} + 7800 \text{ Mk.} = \underline{21\,840 \text{ Mk.}}\,,$$

oder:

$$S = 35 \cdot 260 \text{ Mk.} + \frac{20 \cdot 21}{2} \cdot 26 + 14 \cdot 520 \text{ Mk.}\,,$$

$$S = 9100 \text{ Mk.} + 5460 \text{ Mk.} + 7280 \text{ Mk.} = \underline{21\,840 \text{ Mk.}}\,,$$

oder:

$$S = 20 \cdot 260 \text{ Mk.} + \frac{19 \cdot 20}{2} \cdot 26 \text{ Mk.} + 15 \cdot 780 \text{ Mk.}\,,$$

$$S = 5200 \text{ Mk.} + 4940 \text{ Mk.} + 11\,700 \text{ Mk.} = \underline{21\,840 \text{ Mk.}}\,,$$

oder endlich:

$$S = 21 \cdot 260 \text{ Mk.} + \frac{20 \cdot 21}{2} \cdot 26 \text{ Mk.} + 14 \cdot 780 \text{ Mk.}\,,$$

$$S = 5460 \text{ Mk.} + 5460 \text{ Mk.} + 10\,920 \text{ Mk.} = \underline{21\,840 \text{ Mk.}}\,.$$

Die Einzahlung übersteigt den Betrag der Versicherungssumme. Die Versicherung erscheint wirtschaftlich also nicht besonders vorteilhaft; und sie ist es auch tatsächlich nicht, trotz der niedrigen Anfangsprämie. Denn zum Ausgleich dafür müssen die späteren Jahre umso stärker belastet sein.

Aufgabe 61

Das Ergebnis der Aufgabe 31 ist nachzuprüfen mit den Zahlen der Lebenden. [Formel (98)].

$$\begin{aligned} D_{28} &= 35\,559{,}88 \\ v \cdot D_{28} &= 34\,357{,}37 \quad [v = 0{,}966\,183\,575] \\ D_{29} &= 34\,064{,}22 \\ \text{Diff.} = C_{28} &= \quad 293{,}15 \\ \Pi_{28} &= 0{,}008\,2438(4) \\ 1{,}25 \cdot \Pi_{28} &= 0{,}010\,3048 \qquad \underline{10{,}30\,^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Die geringfügige Abweichung der Nettoprämie ist belanglos. Derartige Unterschiede können sich leicht ergeben, wenn verschiedene Berechnungsarten angewendet werden.

$$\begin{aligned} D_{29} &= 34\,064{,}22 \\ v \cdot D_{29} &= 32\,912{,}29 \\ D_{30} &= 32\,627{,}26 \\ \text{Diff.} = C_{29} &= \quad 285{,}03 \\ \Pi_{29} &= 0{,}008\,3674(3) \\ 1{,}25 \cdot \Pi_{29} &= 0{,}010\,4593 \qquad \underline{10{,}50\,^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 62

Das Ergebnis der Aufgabe 32 ist nachzuprüfen mit den Zahlen der Lebenden. [Formel (101)].

$$\begin{aligned} N_{45} &= 248\,898{,}01 \\ D_{45} &= 16\,525{,}11 \quad [d = 0{,}033\,816\,425] \\ a_{45} &= 15{,}06181 \\ d \cdot a_{45} &= 0{,}509\,336(6) \\ A_{45} &= \underline{0{,}490\,663(4)} \qquad \underline{490{,}66\,^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Wieder ergibt sich nur eine geringfügige Abweichung. Hätte man für a den genaueren Wert 15,06180(7) verwendet, so hätte man erhalten:

$$A_{45} = 0{,}490\,663(5)\,. \qquad \underline{490{,}66\,^0/_{00}}\,.$$

Aufgabe 63

Das Ergebnis der Aufgabe 35 ist nachzuprüfen mit den Zahlen der Lebenden. [Formel (102)].

$$N_{38} = 389\,273{,}73$$
$$N_{60} = 72\,687{,}19$$
$$\text{Diff.} = 316\,586{,}54$$
$$D_{38} = 22\,931{,}74$$
$$a_{38,\overline{22}|} = 13{,}805\,60(5)$$
$$d \cdot a_{38,\overline{22}|} = 0{,}466\,856(2)$$
$$A_{38,\overline{22}|} = 0{,}533\,143(8)$$
$$1{,}08 \cdot A_{38,\overline{22}|} = 0{,}575\,795(3) \qquad \underline{576\,^0/_{00}}\,.$$

Aufgabe 64

Das Ergebnis der Aufgabe 33 ist nachzuprüfen mit den Zahlen der Lebenden. [Formel (103)].

$$D_{55} = 9\,753{,}295 \qquad N_{55} = 115\,966{,}463$$
$$D_{42} = 19\,073{,}82 \qquad D_{42} = 19\,073{,}82$$
$${}_{13}E_{42} = 0{,}511\,3446 \qquad {}_{13}|a_{42} = 6{,}079\,876$$
$${}_{13}E_{42} = 0{,}511\,3446$$
$$d \cdot {}_{13}|a_{42} = 0{,}205\,5997$$
$$\text{Diff.} = {}_{13}|A_{42} = 0{,}305\,7449 \qquad \underline{305{,}745\,^0/_{00}}\,.$$

Aufgabe 65

Das Ergebnis der Aufgabe 34 ist, soweit es sich um die einmalige Prämie handelt, nachzuprüfen mit den Zahlen der Lebenden. [Formeln ($104^{\underline{b}}$) und ($104^{\underline{c}}$)].

I.

$$N_{35} = 464\,572{,}29$$
$$N_{40} = 344\,428{,}30 \qquad D_{40} = 20\,932{,}70$$
$$\text{Diff.} = 120\,143{,}99 \qquad D_{35} = 26\,225{,}18$$
$$D_{35} = 26\,225{,}18 \qquad {}_5E_{35} = 0{,}798\,1909$$
$$a_{35,\overline{5}|} = 4{,}581\,245(6)$$

$$d = 0{,}033\,816\,425$$
$$d \cdot a_{35,\overline{5|}} = 0{,}154\,9213$$
$$\underline{{}_5E_{35} = 0{,}798\,1909}$$
$$\text{Summe} = 0{,}953\,1122 = h$$
$$(1 - h) = {}_5A_{35} = 0{,}046\,8878$$
$$1{,}25 \cdot {}_5A_{35} = 0{,}058\,6098 \qquad \underline{58{,}60\,^0/_{00}}\,.$$

II.

$$N_{35} = 464\,572{,}29$$
$$\underline{N_{41} = 323\,495{,}60}$$
$$\text{Diff.} = 141\,076{,}69$$
$$D_{35} = 26\,225{,}18$$
$$a_{35,\overline{6|}} = 5{,}379\,436(5)$$
$$v = 0{,}966\,183\,575$$
$$v \cdot a_{35,\overline{5|}} = 4{,}426\,324(3)$$
$$1 + v \cdot a_{35,\overline{5|}} = 5{,}426\,324(3)$$
$$\underline{a_{35,\overline{6|}} = 5{,}379\,436(5)}$$
$$\text{Diff.} = {}_5A_{35} = 0{,}046\,887(8)$$
$$1{,}25 \cdot {}_5A_{35} = \underline{0{,}058\,6098}\,.$$

Die Ergebnisse der beiden Rechnungsarten stimmen überein.

Aufgabe 66

Das Ergebnis der Aufgabe 43 ist nachzuprüfen mit den Zahlen der Lebenden. [Formel (108)].

$$N_{23} = 886\,677{,}21$$
$$D_{23} = 44\,098{,}34$$
$$a_{23} = 20{,}106\,82$$
$$\frac{1}{a_{23}} = 0{,}049\,7343(7)$$
$$\underline{d = 0{,}033\,8164(3)}$$
$$\text{Diff.} = P_{23} = 0{,}015\,9179(4)\,.$$

Die Berechnung der Bruttoprämie wird am besten folgendermaßen durchgeführt:

$$\frac{1+a}{a} = 0{,}051\,4751 \qquad \alpha = 0{,}035$$
$$\frac{1+a}{a} + \beta = 0{,}053\,4750(7) \qquad \beta = 0{,}002$$
$$\gamma = 0{,}030$$
$$d = 0{,}033\,8164(3)$$
$$\text{Diff.} = 0{,}019\,6586(4) = h$$
$$\frac{h}{1-\gamma} = \mathfrak{P} = 0{,}020\,2666 \qquad \underline{20{,}30\,{}^0/_{00}}\,.$$

Aufgabe 67

Das Ergebnis der Aufgabe 45 ist nachzuprüfen mit den Zahlen der Lebenden. [Formel (109)].

$$N_{28} = 684\,033{,}76$$
$$N_{55} = 115\,966{,}46$$
$$\text{Diff.} = 568\,067{,}30$$
$$D_{28} = 35\,559{,}88$$
$$a_{28,\overline{27|}} = 15{,}974\,95$$
$$\frac{1}{a_{28,\overline{27|}}} = 0{,}062\,5980$$
$$d = 0{,}033\,8164$$
$$\text{Diff.} = P_{28,\overline{27|}} = 0{,}028\,7816 \qquad \underline{28{,}78\,{}^0/_{00}}\,.$$

I.
$$\frac{1+a}{a} = 0{,}063\,8500 \qquad \alpha = 0{,}02$$
$$\beta = 0{,}10$$
$$d = 0{,}033\,8164$$
$$\text{Diff.} = 0{,}030\,0336 = h$$
$$(1+\beta)\cdot h = \mathfrak{p} = 0{,}033\,0370 \qquad \underline{33{,}05\,{}^0/_{00}}\,.$$

II.
$$\frac{1+a}{a} = 0{,}064\,7889 \qquad \alpha = 0{,}035$$
$$\beta = 0{,}020$$
$$\frac{1+a}{a} + \beta = 0{,}066\,7889 \qquad \gamma = 0{,}030$$
$$d = 0{,}033\,8164$$
$$\text{Diff.} = 0{,}032\,9725 = h$$
$$\frac{h}{1-\gamma} = \mathfrak{p} = 0{,}033\,9923 \qquad \underline{34{,}\text{—}\,{}^0/_{00}}\,.$$

Aufgabe 68

Auf das Leben eines 29jährigen soll eine gemischte Versicherung abgeschlossen werden. Das versicherte Kapital von 10 000 Mk. soll sofort nach dem Ableben, spätestens jedoch nach 36 Jahren fällig werden. Die Prämienzahlung dagegen soll höchstens 21 Jahre dauern. In den letzten 15 Jahren soll die Versicherung also prämienfrei sein. Es werden die folgenden Aufschläge in die Prämie hineingerechnet:

für Erwerbskosten: 25 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme,
für laufende Unkosten: $2\frac{1}{2}$ $^0/_{00}$ während der Prämienzahlungsdauer, später nur noch 1 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme,
für Inkassokosten: $3\frac{1}{4}$ % der Bruttoprämie.

Die in der üblichen Weise berechnete Jahresprämie ist nachzuprüfen mit den Zahlen der Lebenden. [Formeln (60), (72^g) und (110)].

$$
\begin{array}{rlcrl}
M_{29} = & 12\,135{,}1471 & \qquad & N_{29} = & 648\,473{,}88 \\
M_{65} = & 3\,440{,}1602 & & N_{50} = & 173\,867{,}58 \\
\hline
\text{Diff.} = & 8\,694{,}9869 & & \text{Diff.} = & 474\,606{,}30 \\
D_{65} = & 4\,855{,}879 & & D_{29} = & 34\,064{,}22 \\
\hline
\text{Summe} = & 13\,550{,}866 & & a_{29,\overline{21|}} = & 13{,}932\,69 \\
D_{29} = & 34\,064{,}22 & & {}_{21}P_{29,\overline{36|}} = & 0{,}028\,5518 \\
A_{29,\overline{36|}} = & 0{,}397\,8035 & & P = & \underline{28{,}55\ ^0/_{00}}\ .
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
N_{29} = & 648\,473{,}88 \\
N_{65} = & 41\,864{,}80\,(6) \\
\text{Diff.} = & 606\,609{,}07\,(4) \\
D_{29} = & 34\,064{,}22 \\
a_{29,\overline{36|}} = & 17{,}807\,81 \\
d \cdot a_{29,\overline{36|}} = & 0{,}602\,1965 \\
A_{29,\overline{36|}} = & 0{,}397\,8035 \\
a_{29,\overline{21|}} = & 13{,}932\,69 \\
{}_{21}P_{29,\overline{36|}} = & 0{,}028\,5518 \qquad \underline{28{,}55\ ^0/_{00}}\ .
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
A + \alpha &= 422{,}8035\ ^0/_{00} \\
\beta_2 \cdot a_{x,\overline{n}|} &= 17{,}8078\ ^0/_{00} \\
(\beta_1 - \beta_2) \cdot a_{x,\overline{t}|} &= \underline{20{,}8990\ ^0/_{00}} \\
\text{Summe} = \text{Zähler} &= 461{,}5103\ ^0/_{00} \\
(1 - \gamma)\, a_{x,\overline{t}|} = \text{Nenner} &= 13{,}47988 \\
{}_t\mathfrak{P}_{x,\overline{n}|} &= 34{,}2370\ ^0/_{00} \qquad \underline{34{,}25\ ^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

Die Jahresprämie beläuft sich auf 342,50 Mk. Sie ist höchstens 21mal zu entrichten, sodaß also 7192,50 Mk. eingezahlt wären, wenn der Versicherte 50 Jahre alt geworden ist.

Aufgabe 69

Wie vererbt sich der von einem 30jährigen eingelegte Betrag 100 in 25 Jahren, wenn der vererbte Betrag [die Tontine] nur im Erlebensfall ausgezahlt werden soll? Zinssatz: $3^1/_2$%. [Formel (118)].

$$
\begin{aligned}
D_{30} &= 32\,627{,}26 \\
D_{55} &= 9\,753{,}295 \\
{}_{25}\varphi_{30} &= 3{,}345\,255 \qquad \underline{334{,}53\ \text{Mk.}}
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich etwa das $3^1/_3$fache der Einlage. Das entspricht einer Erlebensfallverzinsung von nahezu 5%. [Es wäre für einen Zinssatz von 5%: $(1 + i)^{25} = 3{,}386\,355$].

Aufgabe 70

Die für die Versicherung eines 40jährigen alljährlich entrichtete Nettoeinlage 100 ist 10 Jahre hindurch verzinst und vererbt worden. Welcher Betrag ist nach 10 Jahren vorhanden? [Formel ($119\underline{c}$)].

$$
\begin{aligned}
D_{50} &= 12\,861{,}58 \\
D_{40} &= 20\,932{,}70 \\
{}_{10}E_{40} &= 0{,}614\,4253 \\
a_{40,\overline{10}|} &= 8{,}148\,052 \\
r_{40,\overline{10}|} &= 13{,}2612(6) \qquad \underline{1326{,}13}\,.
\end{aligned}
$$

Auch hier ergibt sich im Erlebensfalle wieder eine Verzinsung von etwa 5 %. [Es ist bei einem Zinssatz von 5 % : $r_{\overline{10}|} = 13{,}206\,787$] .

Aufgabe 71

Für das Beispiel der Aufgabe 45 ist prospektiv das Deckungskapital des 7. Versicherungsjahres zu berechnen. [Formel (121$\underline{^{a}}$)].

Nach der auf Seite 113 des Lehrbuches angegebenen mechanischen Merkregel ist folgendermaßen zu verfahren:

Man setzt als Nenner der Bruchstriche I und III den Wert D_{35} ein. Alsdann füllt man den Bruchstrich II aus. Der Bruchstrich erhält die Form $\dfrac{M_{28} - M_{55} + D_{55}}{N_{28} - N_{55}}$. Nun überträgt man den Zähler $(M_{28} - M_{55} + D_{55})$ auf den Bruchstrich I. Dabei läßt man die Werte M_{55} und D_{55} als „feste“ Werte ungeändert. Dagegen ändert man M_{28} in M_{35} um. Nach demselben Verfahren überträgt man den Nenner $(N_{28} - N_{55})$ auf den Zähler des Bruchstriches III, indem man ihn gleichzeitig in $(N_{35} - N_{55})$ umändert. Es ist also:

$$_7V = \left(\frac{M_{35} - M_{55} + D_{55}}{D_{35}}\right) - \left(\frac{M_{28} - M_{55} + D_{55}}{N_{28} - N_{55}}\right) \cdot \left(\frac{N_{35} - N_{55}}{D_{35}}\right).$$

$M_{28} = 12\,428{,}3019$	$M_{35} = 10\,515{,}0014$
$M_{55} = 5\,831{,}7260$	$M_{55} = 5\,831{,}7260$
Diff. $= 6\,596{,}5759$	Diff. $= 4\,683{,}2754$
$D_{55} = 9\,753{,}295$	$D_{55} = 9\,753{,}295$
Summe $= 16\,349{,}870(9)$	Summe $= 14\,436{,}570(4)$
$N_{28} = 684\,033{,}76$	$N_{35} = 464\,572{,}29$
$N_{55} = 115\,966{,}46(3)$	$N_{55} = 115\,966{,}46(3)$
Diff. $= 568\,067{,}29(7)$	Diff. $= 348\,605{,}82(7)$

$$D_{35} = 26\,225{,}18$$

$$\begin{aligned} &\text{Bruchstrich} \quad \mathrm{I} = 0{,}550\,485 \quad = A_{35,\overline{20}|} \\ &\quad\text{„} \qquad\quad \mathrm{II} = 0{,}028\,7816 = P_{28,\overline{27}|} \\ &\quad\text{„} \qquad\quad \mathrm{III} = 13{,}292\,79 \quad = a_{35,\overline{20}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{35,\overline{20}|} &= 550{,}485\ ^0/_{00} \\ P_{28,\overline{27}|} \cdot a_{35,\overline{20}|} &= 382{,}588\ ^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {}_7V &= 167{,}897\ ^0/_{00} \qquad \underline{167{,}90\ ^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Für 4000 Mk. Versicherungssumme ergibt sich nach 7 Jahren als Deckungskapital ein Betrag von 671,60 Mk.

Aufgabe 72

Wie kann in dem Beispiel der Aufgabe 71 das Deckungskapital noch auf andere Weise prospektiv ermittelt werden? [Formeln ($121^{\underline{d}}$), ($121^{\underline{e}}$), ($122^{\underline{c}}$) und ($122^{\underline{d}}$)].

I.

$$\begin{aligned} M_{35} &= 10\,515{,}0014 \\ M_{55} &= 5\,831{,}7260 \\ \hline \text{Diff.} &= 4\,683{,}2754 \\ D_{55} &= 9\,753{,}295 \\ \hline \text{Summe} &= 14\,436{,}570(4) \\ \hline a_{35,\overline{20}|} &= 13{,}292\,79 \\ a_{35,\overline{20}|} \cdot h &= {}_7V = 0{,}167\,897 \end{aligned}
\qquad
\begin{aligned} N_{35} &= 464\,572{,}29 \\ N_{55} &= 115\,966{,}46(3) \\ \hline \text{Diff.} &= 348\,605{,}82(7) \\ P_{35,\overline{20}|} &= 0{,}041\,4123 \\ P_{28,\overline{27}|} &= 0{,}028\,7816 \\ \text{Diff.} &= 0{,}012\,6307 = h \\ & \underline{167{,}90\ ^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

II.

$$\begin{aligned} P_{28,\overline{27}|} &= 0{,}028\,7816 \\ P_{35,\overline{20}|} &= 0{,}041\,4123 \\ \text{Quotient} &= 0{,}695\,001\,(2) = h \\ (1-h) &= 0{,}304\,998(8) \\ A_{35,\overline{20}|} &= 0{,}550\,485 \\ (1-h)\,A_{35,\overline{20}|} &= 0{,}167\,897\,(3) = {}_7V \qquad \underline{167{,}90\ ^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} a_{35,\overline{20}|} &= 13{,}292\,79 \\ a_{28,\overline{27}|} &= 15{,}974\,95 \\ \text{Quotient} &= 0{,}832\,102\,(1) = h \\ (1-h) = {}_7V &= 0{,}167\,897\,(9) \qquad \underline{167{,}90\ ^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

IV.

$$
\begin{aligned}
P_{28,\overline{27|}} &= 0{,}028\,7816 \\
d &= 0{,}033\,8164 \\
\hline
\text{Summe} &= 0{,}062\,5980 \\
a_{35,\overline{20|}} &= 13{,}292\,79 \\
a_{35,\overline{20|}} \cdot [P + d] &= 0{,}832\,102(1) = h \\
(1 - h) = {}_7V &= 0{,}167\,897(9) \qquad \underline{\underline{167{,}90\,{}^0/_{00}\,.}}
\end{aligned}
$$

Die Formeln ($122^{\underline{c}}$) und ($122^{\underline{d}}$) liefern hier ein etwas genaueres Ergebnis als die Formeln ($121^{\underline{d}}$) und ($121^{\underline{e}}$). Der Unterschied ist praktisch indes belanglos.

Aufgabe 73

Für das Beispiel der Aufgabe 38 ist das 18. Deckungskapital zu berechnen. [Formel ($121^{\underline{a}}$)].

Hier ist $A_m = {}_{n-m}E_{x+m}$. Das allgemeine Symbol bezeichnet also hier den Barwert einer Lebensfallversicherung.

$$
\begin{aligned}
D_{60} &= 7\,094{,}612 & N_{55} &= 115\,966{,}463 \\
D_{55} &= 9\,753{,}295 & N_{60} &= 72\,687{,}190 \\
\hline
{}_5E_{55} &= 0{,}727\,407 & \text{Diff.} &= 43\,279{,}273 \\
a_{55,\overline{5|}} &= 4{,}437\,40 & D_{55} &= 9\,753{,}295
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= 0{,}020\,8313 \quad \text{[siehe Aufgabe 38!]} \\
A_m &= 727{,}407\,{}^0/_{00} \\
P \cdot a_m &= 92{,}437\,{}^0/_{00} \\
\hline
\text{Diff.} = {}_{18}V &= 634{,}970\,{}^0/_{00} \qquad \underline{\underline{634{,}97\,{}^0/_{00}\,.}}
\end{aligned}
$$

Rechnet man das Ergebnis mit den Rentenbarwerten nach [siehe Seite 116 des Lehrbuches!], so erhält man:

$$
\begin{aligned}
N_{37} &= 413\,261{,}80 & N_{37} &= 413\,261{,}80 \\
N_{60} &= 72\,687{,}19 & N_{61} &= 65\,592{,}58 \\
\hline
\text{Diff.} &= 340\,574{,}61 & \text{Diff.} &= 347\,669{,}22 \\
N_{55} &= 115\,966{,}463 & N_{55} &= 115\,966{,}463 \\
N_{60} &= 72\,687{,}190 & N_{61} &= 65\,592{,}578 \\
\hline
\text{Diff.} &= 43\,279{,}273 & \text{Diff.} &= 50\,373{,}885
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{37} &= 23\,988{,}07 \\
D_{55} &= 9\,753{,}295
\end{aligned}
$$

$$a_{x,\overline{n}|} = 14{,}19767 = h_1$$
$$a_{x,\overline{n+1}|} = 14{,}49342 = h_2$$
$$a_{x+m,\,\overline{n-m}|} = 4{,}43740 = h_3$$
$$a_{x+m,\,\overline{n-m+1}|} = 5{,}16481 = h_4$$
$$\frac{h_2}{h_1} = 1{,}02083 = h_5$$
$$h_4 = 5{,}16481$$
$$h_3 \cdot h_5 = 4{,}52983$$
$$\text{Diff.} = {}_{18}V = 0{,}63498 \qquad \underline{634{,}98\ {}^0/_{00}}\,.$$

Das Ergebnis ist nicht ganz genau, weil zwei Rentenbarwerte voneinander abgezogen worden sind, die nahezu übereinstimmen. Die genauere Rechnung hätte ergeben:

$$h_5 = 1{,}020\,831$$
$$h_4 = 5{,}164\,807$$
$$h_3 \cdot h_5 = 4{,}529\,835$$
$${}_{18}V = 0{,}634\,972 \qquad \underline{634{,}97\ {}^0/_{00}}\,.$$

Aufgabe 74

Für das Beispiel der Aufgabe 47 ist das 10. Deckungskapital zu berechnen. [Formel (121a)].

Richtet man sich hier nach der mechanischen Merkregel, so ist diese insofern abzuändern, als der Nenner des ersten Bruches nicht D_{x+m} heißen kann, weil der Barwert der Versicherung $[A_m]$ nur von der Verzinsung abhängt. Die Anwendung der Merkregel erfordert also eine gewisse Vorsicht.

Man erhält:

$${}_{10}V = v^{10} - P_{30,\overline{20}|} \cdot a_{40,\overline{10}|}$$

oder nach der Merkregel:

$${}_{10}V = \frac{v^{10}}{1} - \left(\frac{v^{20} \cdot D_{30}}{N_{30} - N_{50}}\right) \cdot \left(\frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}}\right).$$

Man kann die allgemeine Geltung der Regel aufrecht erhalten, indem man schreibt:

$$ {}_{10}V = \left(\frac{v^{10} \cdot D_{40}}{D_{40}}\right) - \left(\frac{v^{20} \cdot D_{30}}{N_{30} - N_{50}}\right) \cdot \left(\frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}}\right). $$

Dann hat man tatsächlich mechanisch übertragen, weil ja $v^{20} \cdot D_{30}$ aus zwei „freien" Faktoren besteht, D_{30} also in D_{40} umzuändern und v^{20} durch v^{10} zu ersetzen ist, da die fernere Dauer nur noch 10 Jahre ausmacht. Es ergibt sich:

$$ \begin{array}{rl} N_{30} = & 614\,409{,}66 \\ N_{50} = & 173\,867{,}58 \\ \hline \text{Diff.} = & 440\,542{,}08 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} N_{40} = & 344\,428{,}30 \\ N_{50} = & 173\,867{,}58 \\ \hline \text{Diff.} = & 170\,560{,}72 \end{array} $$

$$ \begin{array}{rl} D_{30} = & 32\,627{,}26 \\ D_{40} = & 20\,932{,}70 \\ v^{20} = & 0{,}502\,566 \\ v^{10} = & 0{,}708\,919 \\ v^{10} = \mathrm{I} = & 0{,}708\,919 \end{array} $$

$$ \begin{array}{rl} v^{20} \cdot D_{30} = & 16\,397{,}3(5) \\ (N_{30} - N_{50}) = & 440\,542{,}08 \\ \hline \mathrm{II} = 0{,}0372\,208(5) = & P_{30,\overline{20|}}\,. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} (N_{40} - N_{50}) = & 170\,560{,}72 \\ D_{40} = & 20\,932{,}70 \\ \hline \mathrm{III} = 8{,}14805(2) = & a_{40,\overline{10|}}\,. \end{array} $$

$$ \begin{array}{rl} \mathrm{I} = & 708{,}919\,^0/_{00} \\ \mathrm{II} \cdot \mathrm{III} = & 303{,}277\,^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {}_{10}V = & 405{,}642\,^0/_{00} \end{array} \qquad \underline{405{,}64\,^0/_{00}\,.} $$

Aufgabe 75

Auf das Leben eines 20jährigen wird eine einfache Kapitalversicherung auf den Todesfall abgeschlossen, für die jedoch die Prämienzahlungsdauer auf 40 Jahre begrenzt wird. Die Versicherung wird mit Wartefrist abgeschlossen derart, daß nichts auszuzahlen ist, wenn der Versicherte innerhalb der ersten 3 Jahre sterben sollte. Welches Deckungskapital ergibt sich für den Schluß des 1., 2., 3. und 4. Versicherungsjahres? Wel-

ches Deckungskapital ergäbe sich dagegen, wenn die Versicherung regelrecht, also ohne Wartefrist abgeschlossen worden wäre? [Formel (121a)].

Ist die Versicherung mit Wartefrist abgeschlossen, so ist bei der Anwendung der mechanischen Merkregel acht zu geben. Es ist nämlich:

$$ {}_1V = \frac{M_{23}}{D_{21}} - \left(\frac{M_{23}}{N_{20} - N_{60}}\right) \cdot \left(\frac{N_{21} - N_{60}}{D_{21}}\right), $$

$$ {}_2V = \frac{M_{23}}{D_{22}} - \left(\frac{M_{23}}{N_{20} - N_{60}}\right) \cdot \left(\frac{N_{22} - N_{60}}{D_{22}}\right). $$

Hier ist also das Alter 23, mit dem die Leistungspflicht der Gesellschaft beginnen soll, unverändert zu übertragen, weil es noch nicht erreicht ist. Weiter ergibt sich:

$$ {}_3V = \frac{M_{23}}{D_{23}} - \left(\frac{M_{23}}{N_{20} - N_{60}}\right) \cdot \left(\frac{N_{23} - N_{60}}{D_{23}}\right) $$

und dann:

$$ {}_4V = \frac{M_{24}}{D_{24}} - \left(\frac{M_{23}}{N_{20} - N_{60}}\right) \cdot \left(\frac{N_{24} - N_{60}}{D_{24}}\right) ; $$

Nunmehr ist also das Alter im Zähler des ersten Bruches von Jahr zu Jahr zu ändern, da die Wartefrist verstrichen ist. Das Deckungskapital ist aber größer als das der regelrechten Versicherung. Denn

$$ \left(\frac{M_{23}}{N_{20} - N_{60}}\right) \text{ ist kleiner als } \left(\frac{M_{20}}{N_{20} - N_{60}}\right). $$

Der „Gegenwert" der Versicherung mit Wartefrist ist also geringer als der der regelrechten Versicherung. Da aber der Barwert der Versicherung in beiden Fällen derselbe ist, so muß die Versicherung mit Wartefrist ein etwas höheres Deckungskapital aufweisen als die regelrechte Versicherung, obwohl sie eine geringere Prämie erfordert. Es ist eben aus der an sich zwar geringeren Prämie zunächst nichts zur Deckung des Wagnisses verbraucht worden.

Die Rechnung ergibt die folgenden Werte:

$$
\begin{aligned}
N_{20} &= 1\,031\,102{,}57\\
N_{60} &= 72\,687{,}19\\
\hline
\text{Diff.} &= 958\,415{,}38
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{20} &= 15\,388{,}3833 \qquad & M_{23} &= 14\,114{,}0906\\
{}_{40}P_{20} &= 0{,}016\,0561 & {}^{3}_{40}P_{20} &= 0{,}014\,7265\\
&\underline{16{,}0561\ {}^0/_{00}}\,, & &\underline{14{,}7265\ {}^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

Wenn man nun nacheinander die Werte $(N_x - N_{x+n})$, $(N_{x+1} - N_{x+n})$, $(N_{x+2} - N_{x+n})$ usw. zu bilden hat, so vergegenwärtigt man sich, daß $[N_{x+1} - N_{x+n}] = [(N_x - N_{x+n}) - D_x]$, $[N_{x+2} - N_{x+n}] = [(N_{x+1} - N_{x+n}) - D_{x+1}]$ ist usw., daß man also jeden Wert aus dem vorhergegangenen berechnen kann. Im vorliegenden Falle ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
(N_{20} - N_{60}) &= 958\,415{,}38\\
D_{20} \qquad &= 50\,256{,}59\\
\hline
(N_{21} - N_{60}) &= 908\,158{,}79\\
D_{21} \qquad &= 48\,110{,}85\\
\hline
(N_{22} - N_{60}) &= 860\,047{,}94\\
D_{22} \qquad &= 46\,057{,}92\\
\hline
(N_{23} - N_{60}) &= 813\,990{,}02\\
D_{23} \qquad &= 44\,098{,}34\\
\hline
(N_{24} - N_{60}) &= 769\,891{,}68.
\end{aligned}
$$

Probe!

$$
\begin{aligned}
N_{24} &= 842\,578{,}87\\
N_{60} &= 72\,687{,}19\\
\hline
(N_{24} - N_{60}) &= 769\,891{,}68.
\end{aligned}
$$

Weiter ist:

$$
\begin{aligned}
D_{24} &= 42\,230{,}01\\
M_{21} &= 14\,942{,}1436\\
M_{22} &= 14\,516{,}1549\\
M_{23} &= 14\,114{,}0906\\
M_{24} &= 13\,737{,}0095.
\end{aligned}
$$

Nunmehr erhält man für die Versicherung mit Wartefrist:

m	Bruchstrich I	Bruchstrich III	II · III	$_mV$		
1	0,293 366	18,87 638	0,277 983	0,015 383		15,38‰
2	0,306 442	18,67 318	0,274 991	0,031 451		31,45‰
3	0,320 059	18,45 852	0,271 829	0,048 230	!	48,23‰
4	0,325 290	18,23 091	0,268 477	0,056 813		56,81‰ .

Man beachte den Sprung in den Werten, der sich beim 4. Deckungskapital geltend macht! Hier beginnt plötzlich die Leistungspflicht der Gesellschaft. Während die Nettoprämien vorher restlos zurückgestellt werden konnten, wird ihnen nunmehr die Wagnisprämie entzogen.

Für die regelrechte Versicherung erhält man:

m	Bruchstrich I	Bruchstrich III	II · III	$_mV$	
1	0,310 577	18,87 638	0,303 081	0,007 496	7,50‰
2	0,315 172	18,67 318	0,299 818	0,015 354	15,35‰
3	0,320 059	18,45 852	0,296 372	0,023 687	23,69‰
4	0,325 290	18,23 091	0,292 717	0,032 573	32,57‰ .

Hier verlaufen die Zahlen regelmäßig, was man am besten erkennt, wenn man die Differenzen bildet:

7,50			
	7,85		
15,35		0,49	
	8,34		0,05 .
23,69		0,54	
	8,88		
32,57			

Die Untersuchung des Verlaufes der Differenzen ist überhaupt ein wichtiges Prüfungsmittel, das namentlich stets dann angewendet werden sollte, wenn Tarife hergestellt werden.

Aufgabe 76

Für das Beispiel der Aufgabe 34 sind die Deckungskapitale zu berechnen. [Formel (123].

Es liegt eine Versicherung zur einmaligen Prämie vor. Man rechnet folgendermaßen:

m	D_{x+m}	$M_{x+m} - M_{x+n}$	$_{n-m}A_{x+m} = {}_mV$	
0	26 225,18	1229,6358	0,046 888	46,89 ‰
1	25 085,31	976,6119	0,038 932	38,93 ‰
2	23 988,07	727,6638	0,030 334	30,33 ‰
3	22 931,74	482,5347	0,021 042	21,04 ‰
4	21 913,69	239,9439	0,010 949	10,95 ‰
5	20 932,70	0	0	0 .

Die Differenzen verlaufen regelmäßig:

$$\begin{array}{rrrr}
46{,}89 & & & \\
 & -\ 7{,}96 & & \\
38{,}93 & & -\ 0{,}64 & \\
 & -\ 8{,}60 & & -\ 0{,}05 \\
30{,}33 & & -\ 0{,}69 & \\
 & -\ 9{,}29 & & -\ 0{,}11 \\
21{,}04 & & -\ 0{,}80 & \\
 & -\ 10{,}09 & & -\ 0{,}06\,. \\
10{,}95 & & -\ 0{,}86 & \\
 & -\ 10{,}95 & & \\
0{,}00 & & &
\end{array}$$

In den dritten Differenzen finden sich fast stets Sprünge der Art, wie sie sich hier ergeben. Dergleichen Sprünge sind auf die Abrundung zurückzuführen.

Für m = 0 ergibt sich übrigens die einmalige Einlage des Eintrittsalters.

Aufgabe 77

Wie gestaltet sich in dem Beispiel der Aufgabe 34 die Berechnung der Deckungskapitale, wenn die Versicherung mit jährlicher Prämienzahlung abgeschlossen wird? [Formel (121a)].

Es ist zunächst:

$$\begin{array}{ll}
 & N_{35} = 464\,572{,}29 \\
 & N_{40} = 344\,428{,}30 \\
{}_5A_{35} = 46{,}8876\ ‰ & \text{Diff.} = 120\,143{,}99 \\
 & D_{35} = \ \ 26\,225{,}18 \\
P = 10{,}2347\ ‰\,. & a_{35,\overline{5|}} = \ \ 4{,}581\,25\,.
\end{array}$$

Rechnet man weiterhin mit den Barwerten (vgl. auch die Ergebnisse der Aufgabe 76!), so erhält man:

m	$a_{x+m,\,\overline{n-m}\rceil}$	$P \cdot a_m$	A_m	$_mV$
0	4,58125	46,89 ‰	46,89 ‰	0,00 ‰
1	3,74398	38,32 „	38,93 „	0,61 „
2	2,86949	29,37 „	30,33 „	0,96 „
3	1,95561	20,01 „	21,04 „	1,03 „
4	1,00000	10,23 „	10,95 „	0,72 „
5	0,00000	0,00 „	0,00 „	0,00 „ .

Die Deckungskapitale sind außerordentlich klein. Die Risikoversicherung (d. h. die temporäre Todesfallversicherung mit kurzer Dauer) wird also im allgemeinen keinen merklichen Verfügungswert aufweisen.

Aufgabe 78

Für das Beispiel der Aufgabe 40 ist das 32. und das 42. Deckungskapital zu berechnen. [Formeln (121$\underline{a}$) und (123)].

$$\frac{m = 32}{x + m = 60} \qquad \frac{m = 42}{x + m = 70}$$

$$P = 0{,}065\,1928\,.$$

$$N_{65} = 41\,864{,}806 \qquad N_{70} = 21\,390{,}343$$
$$D_{60} = \ \ 7\,094{,}612 \qquad D_{70} = \ \ 3\,032{,}622\,.$$

Man beachte die Verschiedenheit der Berechnung!

$$_{5|}a_{60} = 5{,}90093 \qquad a_{70} = 7{,}05342\,.$$

Der Barwert der Versicherung selbst ist also nach 42 Jahren größer als nach 32 Jahren, obwohl nach 42 Jahren schon 5 Renten ausgezahlt worden sind. Es sind auf der anderen Seite inzwischen beträchtliche Vererbungszinsen hinzugekommen. Seinen höchsten Betrag hat der Barwert nach 37 Jahren erreicht; denn da war $a_{65} = 8{,}62147$. Dann ist der Barwert wieder geringer geworden.

Für $m = 42$ ist die Rechnung bereits beendet. Es ist also:

$$_{42}V = a_{70} = 7{,}05342 \qquad 705{,}40\,\%$$
$$\mathfrak{V} = 17\,635 \text{ Mk.}$$

für 2500 Mk. Jahresrente.

Für $m = 32$ ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} N_{60} &= 72\,687{,}190 \\ N_{65} &= 41\,864{,}806 \\ \hline \text{Diff.} &= 30\,822{,}384 \\ D_{60} &= 7\,094{,}612 \\ a_{60,\overline{5}|} &= 4{,}344\,48 \\ P \cdot a_{60,\overline{5}|} &= 0{,}283\,23 \\ {}_{5|}a_{60} &= 5{,}900\,93 \\ \hline {}_{32}V &= 5{,}617\,70 \qquad 561{,}80\,\%. \\ \mathfrak{V} &= 14\,045 \text{ Mk.} \end{aligned}$$

für 2500 Mk. Jahresrente.

Anmerkung. Sollten die hier berechneten Werte in der Praxis Verwendung finden, so müßten sie noch mit einem Sicherheitsaufschlag versehen werden, weil nicht eine Rentnersterblichkeitstafel, sondern eine Sterblichkeitstafel benutzt worden ist, die für Todesfallversicherungen Geltung hat.

Aufgabe 79

Zu dem Beispiel der Aufgabe 27 ist unter der Annahme, die Versicherung sei genau in der Mitte des Jahres (am 1. Juli) abgeschlossen worden, für den Schluß des Geschäftsjahres (den 31. Dezember) das Deckungskapital zu berechnen. Das Bilanzdeckungskapital ist mit Rücksicht auf die Wahl der Sterblichkeitstafel um 15% höher zu bemessen als das rechnungsmäßige Deckungskapital.

Bei der Berechnung des Bilanzdeckungskapitals ist zu beachten, daß ein Unterschied besteht zwischen dem

Schlusse des laufenden und dem Anfang des folgenden Versicherungsjahres. Zunächst ist allerdings:

$$\left.\begin{array}{l} {}_0V = a_x \\ {}_1V = a_{x+1} \end{array}\right\} \text{(rechnungsmäßig).}$$

Es wäre aber falsch, wenn man danach

$${}_{\frac{1}{2}}V = \frac{1}{2}\left[a_x + a_{x+1}\right]$$

setzen wollte. Das wäre zwar das arithmetische Mittel zweier Barwerte, aber nicht das Bilanzdeckungskapital. Höchstens könnte $\frac{1}{2}\left[a_x + a_{x+1}\right]$ angenähert als Barwert einer Rente auf das Leben des $(x + \frac{1}{2})$jährigen angesehen werden. Die erste Rente wäre dann aber nach 1 Jahre fällig. In dem Bilanzdeckungskapital muß demgegenüber die Tatsache zum Ausdruck kommen, daß in der Mitte des Versicherungsjahres die erste [allgemein: die nächste] Rente schon nach einem halben Jahre fällig wird. Um das zu erreichen, darf man nicht von zwei aufeinander folgenden Barwerten (allgemein: a_{x+m-1} und a_{x+m}) den Mittelwert bilden, sondern man muß den Mittelwert bilden von den Barwerten, wie sie sich am Anfang und am Ende des Jahres ergeben. Am Anfang ist der Barwert gleich a_x [allgemein: a_{x+m-1}]; denn am Anfang des 1. Jahres [allgemein: des m. Jahres] wird die nächste Rente nach einem Jahre fällig. Am Ende des 1. Jahres [allgemein: des m. Jahres] dagegen wird die Rente sofort fällig, weil sie doch gerade am Ende des Jahres auszuzahlen ist. Der Barwert ist dann also gleich a_{x+1} [allgemein: a_{x+m}] zu setzen. Es ergibt sich mithin als Bilanzdeckungskapital:

$${}_1B = \frac{1}{2}\left[a_x + \mathrm{a}_{x+1}\right]$$

oder allgemein als Bilanzdeckungskapital des m. Jahres

$${}_mB = \frac{1}{2}\left[a_{x+m-1} + \mathrm{a}_{x+m}\right].$$

Dafür kann man ganz nach Belieben:

$$_{m}B = \frac{1}{2}\left[a_{x+m-1} + a_{x+m} + 1\right]$$

oder:

$$_{m}B = \frac{1}{2}\left[a_{x+m-1} + a_{x+m} - 1\right]$$

setzen. Man kann auch schreiben:

$$_{m}B = \frac{_{m-1}V + {}_{m}V}{2} + \frac{1}{2}\,.$$

Im vorliegenden Falle ergibt sich:

$$N_{55} = 115\,966{,}463 \qquad N_{56} = 106\,213{,}168$$
$$D_{54} = 10\,337{,}45 \qquad D_{55} = 9\,753{,}295$$
$$a_{54} = 11{,}218\,09 = {}_{0}V \qquad a_{55} = 10{,}889\,98 = {}_{1}V$$

$$\frac{1}{2}\left[{}_{0}V + {}_{1}V\right] + \frac{1}{2} = 11{,}5540(4) = {}_{1}B$$

$$1{,}15 \cdot {}_{1}B = 13{,}2871(5)\,.$$

Für eine Jahresrente von 2972 Mk. wäre somit am Schlusse des Geschäftsjahres, in dem die Versicherung abgeschlossen worden ist, als Bilanzdeckungskapital ein Betrag von 39 490 Mk. zurückzustellen. Die Gesellschaft hat also den ihr aus der Kaufsumme verbleibenden Betrag ein halbes Jahr hindurch mit einem Jahreszinssatz von 6% verzinsen müssen. Es ergeben sich nämlich die folgenden Zahlen:

Bruttoeinlage	40 000 Mk.	
Nettoeinlage	33 340 Mk.	(rechnungs-
davon 5% für Unkosten	1 667 Mk.	mäßig)
Rest der Bruttoeinlage	38 333 Mk.	
6%ige Zinsen für ½ Jahr	1 150 Mk.	
Rücklage	39 483 Mk.	

Der hohe Zinssatz findet seine Begründung in der Möglichkeit des Ablebens der Rentnerin (Vererbungszins!).

Man kann übrigens den Rentenvererbungszins sehr leicht berechnen nach der Formel

$$\varphi_x = \frac{a_{x+1}}{a_x} = \frac{1 + a_{x+1}}{a_x}.$$

Im vorliegenden Falle wäre:

$$\varphi_{54} = \frac{a_{55}}{a_{54}} = \frac{11{,}889\,98}{11{,}218\,09},$$

$$\varphi_{54} = 1{,}0599.$$

Der Vererbungszins muß also tatsächlich etwa 6% im Jahr ausmachen. (Wegen des Aufschlagverfahrens ergibt sich eine geringe Abweichung im Vererbungssatz.)

Aufgabe 80

Auf das Leben eines 45jährigen soll eine gemischte Versicherung über 50 000 Mk. in der Weise abgeschlossen werden, daß der Beginn der Versicherung um 5 Jahre zurückverlegt und eine fernere Versicherungsdauer von 15 Jahren vereinbart wird. [In der Praxis bezeichnet man einen solchen Vorgang bisweilen als „Jungkaufen"]. Als rechnungsmäßiges Eintrittsalter gilt also ein Alter von 40 Jahren und als Endalter das Alter 60. Die Versicherung ist mit Gewinnbeteiligung abgeschlossen. Die abschließende Gesellschaft behält nur 30 000 Mk. für eigene Rechnung; den Rest von 20 000 Mk. [den sogenannten Exzedenten] gibt sie in Rückdeckung. Die Rückversicherungsgesellschaft erhält die rechnungsmäßige Nettoprämie mit einem Aufschlag von 2% und mit dem Aufschlag, der die Abschlußkosten deckt. Diese ersetzt der Rückversicherer für den in Rückdeckung gegebenen Teil. Es wird gerechnet mit einem Kostensatz von 25‰. Die abschließende Gesellschaft fordert als einmalige Nachzahlung das Deckungskapital, den Endwert der ersten 5 Quoten, die zur Tilgung der Abschlußkosten zu dienen haben, und

die rechnungsmäßige Gewinnrücklage. Diese soll 170% der Bruttoprämie ausmachen. Die Bruttoprämie beträgt 56,— ‰, für 50000 Mk. Kapital also 2800 Mk. Welche Prämie und welche Nachzahlung hat die Rückversicherungsgesellschaft zu fordern, wenn die Hauptversicherungsgesellschaft sich schließlich, um das Geschäft nicht scheitern zu lassen, damit einverstanden erklärt, daß statt der angegebenen technisch genauen Nachzahlung einfach 5 Jahresprämien (ohne Zinsen) nachgezahlt werden sollen?

Zunächst ergibt sich:

$$\begin{aligned}
a_{40,\overline{20}|} &= 12{,}98166 \\
A_{40,\overline{20}|} &= 561{,}0066\ ‰ \\
P_{40,\overline{20}|} &= 43{,}21532\ ‰ \\
\frac{25\ ‰}{a_{40,\overline{20}|}} &= 1{,}92579\ ‰ \\
1{,}02 \cdot P_{40,\overline{20}|} &= 44{,}07963\ ‰ \\
\hline
\text{Summe} &= 46{,}00542\ ‰ = RP. \quad \underline{46,\text{—}\ ‰}.
\end{aligned}$$

Die Rückversicherungsprämie ist also für 20000 Mk. Kapital auf <u>920 Mk.</u> im Jahr festzusetzen.

Weiter ist:

$$\begin{aligned}
A_{45,\overline{15}|} &= 639{,}4079\ ‰ \\
P_{40,\overline{20}|} &= 43{,}21532\ ‰ \\
a_{45,\overline{15}|} &= 10{,}66322 \\
{}_5V &= 178{,}593(4)\ ‰ \qquad \underline{178{,}59\ ‰}.
\end{aligned}$$

Es ist nun zu beachten, daß zum Deckungskapital noch der Endwert der Tilgungsquote hinzukommt. Wäre die Versicherung nämlich schon 5 Jahre vorher in Kraft getreten, so hätten die Tilgungsquoten der ersten 5 Jahre doch bereits einen genau anzugebenden Endwert, nämlich den Endwert

$$\frac{0{,}025}{a_{40,\overline{20}|}} \cdot r_{40,\overline{5}|} = \frac{0{,}025}{a_{40,\overline{20}|}} \cdot \frac{a_{40,\overline{5}|}}{{}_5E_{40}}$$

erreicht. Auf diesen Zuschlag darf nicht verzichtet werden. Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
D_{40} &= 20\,932{,}70\\
D_{45} &= 16\,525{,}11\\
{}_5E_{40} &= 0{,}789\,4400\\
a_{40,\overline{5}|} &= 4{,}563\,687\\
r_{40,\overline{5}|} &= 5{,}780\,917\\
\frac{25\,^0/_{00}}{a_{40,\overline{20}|}} &= 1{,}925\,79\,^0/_{00} = h\\
h \cdot r_{40,\overline{5}|} &= 11{,}132(8)\,^0/_{00}\\
{}_5V &= 178{,}593(4)\,^0/_{00}\\
\hline
\text{Summe} &= 189{,}726(2)\,^0/_{00} = {}_5V^0 \qquad \underline{189{,}73\,^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

Dazu kommt nun noch die Gewinnreserve. Es ist:

$$
\begin{aligned}
1{,}70 \cdot \mathfrak{p} &= 95{,}20\,^0/_{00}\\
{}_5V^0 &= 189{,}73\,^0/_{00}\\
\hline
\text{Summe} &= 284\,93\,^0/_{00} = \mathfrak{R}^0 \qquad \underline{285\,^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

Seinem Charakter nach ist der Ausdruck $\mathfrak{R}^0$ eine „Prämienreserve“. Er enthält alles das, was sofort zurückgestellt werden muß, damit die Versicherung in der gewünschten Form übernommen werden kann. Für 50 000 Mk. Versicherungssumme wäre also eine einmalige Nachzahlung von <u>14 250 Mk.</u> und gleichzeitig die Prämie des 6. Versicherungsjahres zu entrichten. Es war nun aber angenommen, der Antragsteller habe an der Höhe der Nachzahlung Anstoß genommen. Er hätte zum Beispiel mit einem Schein des Rechts einwenden können, die Gesellschaft könnte sich doch wohl mit der einfachen Prämiennachzahlung begnügen, da sie ja für die zurückliegenden Jahre kein Todesfallwagnis getragen habe. Daß die Gesellschaft umgekehrt ihm selbst das Wagnis des Verlustes der Gewinnrücklage abnimmt, wird ihm im allgemeinen nicht einleuchten. Kurz, die Gesellschaft begnügt sich, um das Geschäft nicht verloren gehen zu lassen, mit der Nachzahlung von 14 000 Mk.

Die Rückversicherungsgesellschaft [vgl. hierzu die Anmerkung am Schluß dieser Aufgabe!] leistet nun für

die Gewinnanteile keine Rückdeckung. Sie hat also auf die Gewinnreserve unter keinen Umständen Anspruch zu erheben. Wollte die abschließende Gesellschaft ihr also von der Nachzahlung einen entsprechenden Anteil von 5600 Mk. zuweisen, so wäre das falsch. Die Rückversicherungsgesellschaft hat nur das Deckungskapital zusammen mit dem Endwert der 5 Tilgungsquoten, für 20 000 Mk. also einen Betrag von 3794,60 Mk. zu fordern. Soll ihr darüber hinaus durchaus noch etwas zugewendet werden, so könnte das höchstens der Endwert ihrer Verwaltungskostenzuschläge sein. Es wäre dann:

$$\begin{aligned} P_{40,\overline{20}|} &= 43{,}215\,32 \\ 0{,}02 \cdot P_{40,\overline{20}|} &= 0{,}864\,31 = h \\ h \cdot \mathfrak{r}_{40,\overline{5}|} &= 4{,}996(5) \\ \frac{25\,^0/_{00}}{a_{40,\overline{20}|}} \cdot \mathfrak{r}_{40,\overline{5}|} &= 11{,}132(8) \\ {}_5V &= 178{,}593(4) \\ \hline \text{Summe} &= 194{,}722(7) \qquad \underline{194{,}72\,^0/_{00}\,.} \end{aligned}$$

Es ergäbe sich dann also höchstens ein Betrag von 3894,40 Mk. als Anteil der Rückversicherungsgesellschaft. Wenn aber die Hauptversicherungsgesellschaft zu ihrer „Prämienreserve" keinen Aufschlag fordert oder ihn nicht fordern kann, so kann ihn die Rückversicherungsgesellschaft füglich auch nicht für sich in Anspruch nehmen. Sie ist ohnehin schon dadurch vor der Hauptversicherungsgesellschaft begünstigt, daß sie keine Gewinnanteile zu ersetzen hat, obwohl sie doch aus der ihr in Rückdeckung gegebenen Summe den Sterblichkeitsgewinn und meist auch noch einen großen Teil des Zinsgewinnes für sich behält. Ganz ungerechtfertigt wäre es unter diesen Umständen, wenn die Rückversicherungsgesellschaft für sich 5 Rückversicherungsprämien, also einen Betrag von 4600 Mk. fordern wollte, mit der Begründung etwa, die Hauptversicherungsgesellschaft habe ja auch 5 Bruttoprämien erhalten. Eine solche Begründung wäre durchaus nicht stich-

haltig. Tatsache wäre vielmehr, daß der Hauptversicherer weniger erhalten hat, als er technisch eigentlich brauchte, und daß er außerdem insofern schon einen Verlust erleidet, als er für den vollen Betrag der Versicherungssumme die Gewinnanteile zu vergüten hat. Dazu gehörte ihm eigentlich aus der vollen Summe der Zinsgewinn und der Sterblichkeitsgewinn, wovon er aber doch dem Rückversicherer einen erheblichen Teil ohne wesentliche Gegenleistung überlassen soll.

In der Praxis der Rückversicherung ist es üblich, dem Deckungskapital nicht den Endwert der Tilgungsquoten hinzuzufügen, dafür aber die Abschlußprovision nur für die „Risikosumme", das heißt für die um das Deckungskapital verminderte Versicherungssumme zu vergüten. Das ist natürlich nur ein Annäherungsverfahren. Im vorliegenden Falle ergäben sich die folgenden beiden Formen der Buchung:

	angenähert	genauer
zu Gunsten des Rückversicherers	178,59 ‰	189,73 ‰
zu Lasten des Rückversicherers	20,54 ‰	25,— ‰
Guthaben des Rückversicherers	158,05 ‰	164,73 ‰.

Wollte man technisch ganz genau rechnen, so müßte man eigentlich die Abschlußprovision auch als Endwert buchen. Statt des Betrages von 25,— ‰ ergäbe sich dann ein Betrag von 31,67 ‰, für den Rückversicherer mithin ein Guthaben von 158,07 ‰, das sich mit dem Näherungswert nahezu deckt. Anderseits hat aber die Hauptversicherungsgesellschaft die Abschlußprovision auch nicht schon 5 Jahre vorher vergütet. Man kann also beide Methoden verfechten. Übrigens ist nicht zu übersehen, daß für das als „Näherungsverfahren" bezeichnete Buchungsverfahren die Tilgungsquote der Abschlußvergütung gar nicht in Ansatz gebracht ist. Ein Vergleich ist deswegen eigentlich gar nicht möglich; und das Näherungsverfahren wird im allgemeinen nur dann angewendet werden können, wenn die Rückversicherungsprämie ohne Hinzufügung einer besonderen Tilgungsquote berechnet wird, was bisweilen vorkommt.

Anmerkung. Es lohnt sich, einmal zu untersuchen, wie eine solche „Rückverlegung“ oder „Rückdatierung“ versicherungstechnisch zu bewerten ist.

Wären die Abschlußkosten tatsächlich schon zu Beginn der Versicherung verausgabt, so wäre

$$ {}_m u_x = \alpha \cdot \frac{a_{x+m,\, \overline{n-m}|}}{a_{x,\overline{n}|}} $$

der noch ungedeckte Teil des Unkostenbetrages α [vgl. Seite 128 des Lehrbuchs!]. Denn nach m Jahren ist $\alpha \cdot {}_m\varphi_x$ der Endwert der verausgabten einmaligen Unkosten; und $\frac{\alpha}{a_{x,\overline{n}|}} \cdot r_{x,\overline{m}|}$ ist der Endwert der demgegenüber vereinnahmten Tilgungsquoten. Die jeweils verbleibenden ungedeckten einmaligen Unkosten sind also ausgedrückt in der Gleichung:

$$ {}_m u_x = \alpha \cdot {}_m\varphi_x - \frac{\alpha}{a_{x,\overline{n}|}} \cdot r_{x,\overline{m}|}\,, $$

und es ist dann weiter:

$$ {}_m u_x = \alpha \cdot {}_m\varphi_x \cdot \left[1 - \frac{a_{x,\overline{m}|}}{a_{x,\overline{n}|}}\right], $$

$$ {}_m u_x = \alpha \cdot {}_m\varphi_x \cdot \left[\frac{N_{x+m} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right], $$

$$ {}_m u_x = \alpha \cdot \frac{D_x}{D_{x+m}} \cdot \left[\frac{N_{x+m} - N_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}\right], $$

also in der Tat:

$$ {}_m u_x = \alpha \cdot \frac{a_{x+m,\, \overline{n-m}|}}{a_{x,\overline{n}|}}\,. $$

Für die gewöhnliche gemischte Versicherung wird dann einfach: ${}_m u_x = \alpha \cdot [1 - {}_m V_x]$.

In diesem Falle ist dann der Betrag der bereits gedeckten Unkosten: ${}_m g_x = \alpha \cdot {}_m V_x$.

Diesen Betrag hätte der Rückversicherer zu bekommen, wenn er der Annahme gemäß die Abschlußprovision tatsächlich schon vor m Jahren vergütet hätte. Alsdann käme es auf dasselbe hinaus, wenn man ihm die einmalige Entschädigung nicht gäbe, ihn aber die

Abschlußvergütung nur aus der Wagnissumme zahlen ließe. Die Buchung gestaltete sich dann folgendermaßen:

	entweder	oder
zu Gunsten des Rückversicherers	${}_mV_x + \alpha \cdot {}_mV_x$	${}_mV_x$
zu Lasten des Rückversicherers	α	$\alpha \cdot [1 - {}_mV_x]$
Guthaben des Rückversicherers	in beiden Fällen ${}_mV_x + \alpha \cdot {}_mV_x - \alpha$.	

Tatsächlich hat nun aber doch der Rückversicherer die Abschlußprovision nicht schon vor m Jahren vergütet, ebenso wenig wie der Hauptversicherer. Deswegen ist eigentlich ein anderes Buchungsverfahren am Platze. Erlegt man dem Rückversicherer irgend eine Abschlußprovision α' auf, wobei selbstverständlich $\alpha' = \alpha \cdot [1 - V]$ sein darf, so ist eine einmalige Tilgungsentschädigung gar nicht erforderlich, wenn man nur zur Rückversicherungsprämie die technisch richtige Tilgungsquote hinzufügt. Diese ist, wenn schon m Jahre als abgelaufen gelten sollen, auf $\dfrac{\alpha'}{a_{x+m,\, \overline{n-m}|}}$ zu bemessen.

Allenfalls könnte man auch aus der tatsächlich geforderten Abschlußprovision α' eine künstlich auf den Beginn der Versicherung bezogene Provision α'' berechnen. Diese wäre auf $\alpha'' = \alpha' \cdot {}_mE_x$ festzusetzen. Für α'' hätte dann die strenge Rechnung Geltung.

Für das Beispiel der vorliegenden Aufgabe wäre $\alpha' = 25\,^0/_{00}$ und somit $\alpha'' = 19{,}736\,^0/_{00}$. Weiter wäre dann:

$$
\begin{aligned}
{}_5u_{40} &= \alpha'' \cdot [1 - {}_5V] = 16{,}211\,^0/_{00} \\
{}_5g_{40} &= \alpha'' \cdot {}_5V = 3{,}525\,^0/_{00} \\
{}_5V &= 178{,}593\,^0/_{00} \\
\hline
{}_5V^0 &= 182{,}118\,^0/_{00} \qquad \underline{182{,}12\,^0/_{00}}.
\end{aligned}
$$

Nunmehr ergibt sich Buchungsgleichheit:

	entweder	oder
zu Gunsten des Rückversicherers	$182{,}12\,^0/_{00}$	$178{,}59\,^0/_{00}$
zu Lasten des Rückversicherers	$19{,}74\,^0/_{00}$	$16{,}21\,^0/_{00}$
Guthaben des Rückversicherers	$162{,}38\,^0/_{00}$	$162{,}38\,^0/_{00}$.

Aufgabe 81

Für die auf 15 Jahre abgekürzte gemischte Versicherung auf das Leben eines 50jährigen ist retrospektiv das 10. Deckungskapital zu ermitteln. [Formeln (124 $\underline{^a}$), (124$\underline{^b}$) und (124$\underline{^c}$)].

$$M_{50} = 6\,982{,}0017 \qquad A_{50,\overline{15|}} = 652{,}9305\ {}^0/_{00}$$
$$M_{60} = 4\,636{,}5911 \qquad a_{50,\overline{15|}} = 10{,}26334$$
$$\text{Diff.} = 2\,345{,}4106 \qquad P_{50,\overline{15|}} = 63{,}61774\ {}^0/_{00}$$
$$D_{50} = 12\,861{,}58$$
$${}_{10}A_{50} = 0{,}182\,3579 \qquad a_{50,\overline{10|}} = 7{,}866\,871$$
$$D_{60} = 7\,094{,}612 \qquad r_{50,\overline{10|}} = 14{,}261\,58$$
$${}_{10}E_{50} = 0{,}551\,6128$$
$${}_{10}\varphi_{50} = 1{,}812\,866$$

I. (124$\underline{^a}$)

$$P_{50,\overline{15|}} \cdot r_{50,\overline{10|}} = 907{,}289(5)\ {}^0/_{00}$$
$${}_{10}A_{50} \cdot {}_{10}\varphi_{50} = 330{,}590(4)\ {}^0/_{00}$$
$$\text{Diff.} = {}_{10}V = 576{,}699(1)\ {}^0/_{00} \qquad \underline{576{,}70\ {}^0/_{00}}.$$

II. (124$\underline{^b}$)

$$P_{50,\overline{15|}} \cdot a_{50,\overline{10|}} = 500{,}472(6)$$
$${}_{10}A_{50} = 182{,}357(9)$$
$$\text{Diff.} = 318{,}114(7) = h$$
$$h \cdot {}_{10}\varphi_{50} = {}_{10}V = 576{,}699(3) \qquad \underline{576{,}70\ {}^0/_{00}}.$$

III. (124$\underline{^c}$)

$$N_{50} = 173\,867{,}58 \qquad M_{50} = 6982{,}0017$$
$$N_{60} = 72\,687{,}19 \qquad M_{60} = 4636{,}5911$$
$$\text{Diff.} = 101\,180{,}39 = h_1 \qquad \text{Diff.} = 2345{,}4106 = h_2$$
$$D_{60} = 7094{,}612$$
$$\frac{h_1}{D_{60}} = 14{,}26158 = h_3 \qquad \frac{h_2}{D_{60}} = 0{,}330\,5904 = h_4$$
$$h_3 \cdot P_{50,\overline{15|}} = 907{,}289(5)\ {}^0/_{00}$$
$$h_4 = 330{,}590(4)\ {}^0/_{00}$$
$$\text{Diff.} = {}_{10}V = 576{,}699(1) \qquad \underline{576{,}70\ {}^0/_{00}}.$$

Aufgabe 82

Auf das Leben eines 25jährigen ist eine auf das 50. Lebensjahr abgekürzte Versicherung in der Weise abgeschlossen, daß die doppelte Summe ausgezahlt werden soll, wenn der Versicherte innerhalb der ersten 5 Jahre stirbt, die anderthalbfache Summe dagegen, wenn der Versicherte in den folgenden 5 Jahren stirbt. Vom Beginn des 11. Jahres an ist auf den Todesfall die einfache Summe versichert, die auch im Erlebensfalle nach 25 Jahren fällig werden soll. Die Prämie soll sich vom 6. Jahre an vertraglich von Jahr zu Jahr um 5 % des ursprünglichen Betrages ermäßigen, sodaß die Versicherung im 25. Jahre von selbst prämienfrei wird. Welche Prämienleistung ergibt sich, wenn zur Nettoprämie einfach $16\frac{1}{2}$ % der Bruttoprämie hinzugefügt werden? Welches Deckungskapital ist für den Schluß des 4., des 8., des 12. und des 16. Jahres zurückzustellen? [Formeln ($121\underline{a}$) und (124)].

Zunächst sind die Barwerte zu berechnen. Dem Barwert der Versicherung kann man zwei Formen geben; man kann setzen:

$$A^{>} = \frac{2(M_{25}-M_{30}) + 1\frac{1}{2}(M_{30}-M_{35}) + (M_{35}-M_{50}) + D_{50}}{D_{25}}$$

oder:

$$A^{>} = \frac{2(M_{25}-M_{50}) - \frac{1}{2}(M_{30}-M_{50}) - \frac{1}{2}(M_{35}-M_{50}) + D_{50}}{D_{25}}.$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_{25} &= 13\,383{,}6818 \\ M_{30} &= 11\,850{,}1244 \\ M_{35} &= 10\,515{,}0014 \\ M_{50} &= 6\,982{,}0017 \\ D_{50} &= 12\,861{,}58 \\ D_{25} &= 40\,448{,}62\,. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(M_{25} - M_{30}) &= 1\,533{,}5574 = h_1 \\
(M_{30} - M_{35}) &= 1\,335{,}1230 = h_2 \\
(M_{35} - M_{50}) &= 3\,532{,}9997 = h_3 \\
\hline
2h_1 + 1\tfrac{1}{2}h_2 + h_3 &= 8\,602{,}7990 \\
D_{50} &= 12\,861{,}58 \\
\hline
\text{Summe} &= 21\,464{,}37\,(9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(M_{25} - M_{50}) &= 6\,401{,}6801 = h_4 \\
(M_{30} - M_{50}) &= 4\,868{,}1227 = h_5 \\
(M_{35} - M_{50}) &= 3\,532{,}9997 = h_6 \\
\hline
2h_4 - \tfrac{1}{2}h_5 - \tfrac{1}{2}h_6 &= 8\,602{,}7990 \\
D_{50} &= 12\,861{,}58 \\
\hline
\text{Summe} &= 21\,464{,}37\,(9)
\end{aligned}
$$

$$A^{>} = 530{,}6578\,(8)\,.$$

$$
\begin{aligned}
N_{25} &= 800\,348{,}86 \\
N_{50} &= 173\,867{,}58 \\
\hline
\text{Diff.} &= 626\,481{,}28 \\
D_{25} &= 40\,448{,}62 \\
a_{25,\overline{25}|} &= 15{,}488\,32
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
S_{30} &= 9\,259\,722{,}43 \\
S_{50} &= 1\,819\,511{,}85 \\
20 \cdot N_{50} &= 3\,477\,351{,}60 \\
\hline
\text{Diff.} &= 3\,962\,858{,}98 \\
{}^{5}a'_{25,\overline{25}|} &= 97{,}972\,66
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= 0{,}05 \\
\varepsilon \cdot a' &= 4{,}898\,63 \\
a &= 15{,}488\,32 \\
\hline
a^{>} &= 10{,}589\,69\,.
\end{aligned}
$$

Alsdann ist:

$$P^{>} = \frac{A^{>}}{a^{>}} = 50{,}1108\,{}^{0}/_{00} \qquad \underline{50{,}11\,{}^{0}/_{00}\,.}$$

$$\mathfrak{P}^{>} = \frac{P^{>}}{0{,}835} = 60{,}0129\,{}^{0}/_{00} \qquad \underline{60{,}\text{—}\,{}^{0}/_{00}\,.}$$

Prämie der ersten 5 Jahre:				60 ‰
Prämie	des	6.	Jahres	57 ‰
„	„	7.	„	54 „
„	„	8.	„	51 „
		usw.		
„	„	23.	„	6 „
„	„	24.	„	3 „
„	„	25.	„	0 „
Gesamtaufwendung:				870 ‰ .

Das Deckungskapital berechnet man bei derartig umständlichen Formen meist am einfachsten retrospektiv, weil es fast stets bequemer ist, veränderliche Barwerte von ihrem Ausgangspunkt an zu bilden, als von irgend einem anderen Punkte an. Es folgt der Reihe nach:

I $\underline{m = 4}$

Der Endwert dessen, was die Gesellschaft bereits geleistet hat ist hier ebenso einfach zu bestimmen wie der Endwert der Prämienleistungen. Es ergibt sich:

a) retrospektiv:

$N_{25} = 800\,348{,}86$
$N_{29} = 648\,473{,}88$
$\text{Diff.} = 151\,874{,}98$
$D_{25} = 40\,448{,}62$
$a_{25,\overline{4}|} = 3{,}754\,76(3)$
$D_{29} = 34\,064{,}22$
${}_4E_{25} = 0{,}842\,160(3)$
$r_{25,\overline{4}|} = 4{,}458\,49(0)$
${}_4\varphi_{25} = 1{,}187\,42(2)$

$M_{25} = 13\,383{,}6818$
$M_{29} = 12\,135{,}1471$
$\text{Diff.} = 1\,248{,}5347$
$D_{25} = 40\,448{,}62$
${}_4A_{25} = 0{,}030\,867(2)$

Dieser Wert ist aber für die Berechnung des Deckungskapitals zu verdoppeln, da während der ersten 4 Jahre das doppelte Wagnis zu tragen war.

$$P = 50{,}1108\ ‰$$
$$P \cdot r_{25,\overline{4}|} = 223{,}418(5)\ ‰$$
$$2 \cdot {}_4A_{25} \cdot {}_4\varphi_{25} = 73{,}304(8)\ ‰$$
$$\text{Diff.} = {}_4V = 150{,}113(7)\ ‰ \qquad \underline{150{,}11\ ‰} .$$

b) prospektiv:

(Die Berechnung gestaltet sich schon etwas umständlicher)

$$\begin{aligned} S_{30} &= 9\,259\,722{,}43 \\ S_{50} &= 1\,819\,511{,}85 \\ 20 \cdot N_{50} &= 3\,477\,351{,}60 \\ \hline \text{Diff.} &= 3\,962\,858{,}98 \\ D_{29} &= 34\,064{,}22 \\ a'_{29,\overline{21}|} &= 116{,}334\,94 \\ N_{29} &= 648\,473{,}88 \\ N_{50} &= 173\,867{,}58 \\ \hline \text{Diff.} &= 474\,606{,}30 \\ a_{29,\overline{21}|} &= 13{,}932\,69 \\ \varepsilon \cdot a'_{29,\overline{21}|} &= 5{,}816\,75 \\ \hline \text{Diff.} = a^{>}_{29,\overline{21}|} &= 8{,}115\,94 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{29} &= 12\,135{,}1471 \\ M_{30} &= 11\,850{,}1244 \\ \hline \text{Diff.} &= 285{,}0227 = C_{29} \\ 2\,C_{29} &= 570{,}0454 \\ 1\tfrac{1}{2}\,[M_{30} - M_{35}] &= 2\,002{,}6845 \\ [M_{35} - M_{50}] &= 3\,532{,}9997 \\ D_{50} &= 12\,861{,}58 \\ \hline \text{Summe} &= 18\,967{,}31(0) \\ D_{29} &= 34\,064{,}22 \\ A^{>}_{29,\overline{21}|} &= 0{,}556\,810(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{>}_{m} &= 556{,}810(3)\ {}^0/_{00} \\ P \cdot a^{>}_{m} &= 406{,}696(2)\ {}^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {}_mV &= 150{,}114(1) \qquad \underline{150{,}11\ {}^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Die Abweichung in den Ergebnissen ist nur ganz geringfügiger Art.

II. $\underline{m = 8}$

a) retrospektiv:

(mit Verwendung der Endwerte)

$$\begin{aligned} S_{30} &= 9\,259\,722{,}43 \\ S_{33} &= 7\,512\,993{,}76 \\ 3 \cdot N_{33} &= 1\,561\,858{,}50 \\ \hline \text{Diff.} &= 184\,870{,}17 \end{aligned}$$

zur Probe!

$$\begin{aligned} D_{30} &= 32\,627{,}26 \\ 2 \cdot D_{31} &= 62\,491{,}58 \\ 3 \cdot D_{32} &= 89\,751{,}33 \\ \hline \text{Summe} &= 184\,870{,}17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{33} &= 28\,638{,}38 \\ D_{25} &= 40\,448{,}62 \\ {}_8E_{25} &= 0{,}708\,018(7) \\ r^{>}_{25,\overline{8}|} &= 9{,}444\,87(2) \\ {}_8\varphi_{25} &= 1{,}412\,39(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{30} &= 11\,850{,}1244 \\ M_{33} &= 11\,032{,}8920 \\ \hline \text{Diff.} &= 817{,}2324 = h \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_{25} &= 40\,448{,}62 \\
a'_{25,\overline{8}|} &= 4{,}570\,49(4) \\
N_{25} &= 800\,348{,}86 \\
N_{33} &= 520\,619{,}50 \\
\hline
\text{Diff.} &= 279\,729{,}36 \\
a_{25,\overline{8}|} &= 6{,}915\,67(1) \\
\varepsilon \cdot a'_{25,\overline{8}|} &= 0{,}228\,52(5) \\
\hline
\text{Diff.} = a^{>}_{25,\overline{8}|} &= 6{,}687\,14(6)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
1\frac{1}{2} \cdot h &= 1225{,}8486 \\
2\,[M_{25} - M_{30}] &= 3067{,}1148 \\
\hline
\text{Summe} &= 4292{,}9634 \\
D_{25} &= 40\,448{,}62 \\
{}_8A^{>}_{25} &= 0{,}106\,133(7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &= 50{,}1108\,^0/_{00} \\
P \cdot r^{>}_{25,\overline{8}|} &= 473{,}290(1)\,^0/_{00} \\
{}_8A^{>}_{25} \cdot {}_8\varphi_{25} &= 149{,}902(4)\,^0/_{00} \\
\hline
\text{Diff.} = {}_8V &= 323{,}387(7) \qquad \underline{323{,}39\,^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

b) prospektiv:

Hier ist acht zu geben! Während nämlich bisher, auch wenn prospektiv gerechnet wurde, der Minderungssatz $\varepsilon = 0{,}05$ war, käme man für $m > 6$ mit diesem Satze zu einem falschen Ergebnis. Denn wenn der Barwert der künftigen Leistungen bestimmt wird, dann muß von der gerade vorliegenden (am besten von der zuletzt gezahlten) Prämie ausgegangen werden. Im Verhältnis zu dieser Prämie aber ist die Minderung der Prämie eine andere. Der Satz von ε ändert sicn also für $m > 6$ [allgemein: $m > (t+1)$] von Jahr zu Jahr, während er unverändert bleibt, wenn retrospektiv gerechnet wird. Zunächst mag mit dieser Veränderung der Prämie gerechnet werden.

Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
S_{33} &= 7\,512\,993{,}76 \\
S_{50} &= 1\,819\,511{,}85 \\
17 \cdot N_{50} &= 2\,955\,748{,}86 \\
\hline
\text{Diff.} &= 2\,737\,733{,}05 \\
D_{33} &= 28\,638{,}38 \\
a'_{33,\overline{17}|} &= 95{,}596\,65 \\
\varepsilon &= 0{,}05
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
M_{33} &= 11\,032{,}8920 \\
M_{35} &= 10\,515{,}0014 \\
\hline
\text{Diff.} &= 517{,}8906 = h \\
1\frac{1}{2} \cdot h &= 776{,}8359 \\
(M_{35} - M_{50}) &= 3\,532{,}9997 \\
D_{50} &= 12\,861{,}58 \\
\hline
\text{Summe} &= 17\,171{,}41(6)
\end{aligned}
$$

ist hier nicht zu verwenden!

Die 8. Prämie ist:

$$_8P^{>} = (1 - 3\varepsilon)\,P^{>}$$

$$P^{>} = 50{,}1108(0)\,^0/_{00}$$

$$_8P^{>} = 42{,}5941\,(8)\,^0/_{00};$$

die Minderung ist:

$$\mu = \varepsilon \cdot P^{>}$$

$$\mu = 2{,}5055\,(4)\,^0/_{00}$$

und somit:

$$\varepsilon' = \frac{\mu}{_8P^{>}} = 0{,}058\,8235$$

$$\begin{aligned} N_{33} &= 520\,619{,}50 \\ N_{50} &= 173\,867{,}58 \\ \hline \text{Diff.} &= 346\,751{,}92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{33,\overline{17}|} &= \quad 12{,}107\,95 \\ \varepsilon' \cdot a'_{33,\overline{17}|} &= \quad 5{,}623\,33 \\ \hline \text{Diff.} = a^{>}_{33,\overline{17}|} &= \quad 6{,}484\,62\,. \end{aligned}$$

$$D_{33} = 28\,638{,}38$$

$$A^{>}_{33,\overline{17}|} = \quad 0{,}599\,594(5)\,.$$

Für die weitere Berechnung ist dann nicht

$$P^{>} = 50{,}1108(0)\,^0/_{00}\,,$$

sondern

$$_8P^{>} = 42{,}5941\,(8)\,^0/_{00}$$

zu verwenden. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} A^{>}_{33,\overline{17}|} &= 599{,}594(5)\,^0/_{00} \\ {_8P^{>}} \cdot a^{>}_{33,\overline{17}|} &= 276{,}207\,(1)\,^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {_8V} &= 323{,}387\,(4)\,^0/_{00} \\ & \underline{323{,}39\,^0/_{00}\,.} \end{aligned}$$

Auch hier ist die Abweichung nur geringfügiger Art.

Man kann indes, auch wenn man prospektiv rechnet, die Berechnung so gestalten, daß ε unverändert bestehen bleibt; es wird dadurch aber die Berechnung nicht wesentlich vereinfacht. Nur wenn für eine einzelne Versicherung sämtliche Deckungskapitale zu berechnen sind, empfiehlt sich dieser andere Weg. Es ist dann der Barwert $a^{>}$ entsprechend zu bestimmen. Man darf nicht setzen:

$$a^{>}_{x+m,\,\overline{n-m}|} = a_{x+m,\,\overline{n-m}|} - \varepsilon \cdot a'_{x+m,\,\overline{n-m}|}\,,$$

sondern man hat zu berücksichtigen, daß die Prämie $P^{>}$ an sich schon mit einem abgeänderten Wert in die Rechnung eintritt, man hat also zu setzen:

$$a^{>}_{x+m,\,\overline{n-m}|} = a_{x+m,\,\overline{n-m}|} - \varepsilon\left\{a'_{x+m,\,\overline{n-m}|} + (m-t)\,a_{x+m,\,\overline{n-m}|}\right\}.$$

Denn es muß im Rentenbarwert eine Verbindung von einmaliger und laufender Veränderlichkeit zum Ausdruck kommen.

Im vorliegenden Falle ergäbe sich:

$$t = 5$$
$$m = 8$$
$$(m - t) = 3$$

$$\begin{aligned} a_{33,\overline{17}|} &= 12{,}107\,95 \\ (m-t)\cdot a_{33,\overline{17}|} &= 36{,}323\,85 \\ a'_{33,\overline{17}|} &= 95{,}596\,65 \\ \hline \text{Summe} &= 131{,}920\,50 = h \\ \varepsilon \cdot h &= 6{,}596\,02(5) \\ a_{33,\overline{17}|} &= 12{,}107\,94(5) \\ \hline \text{Diff.} = a^{>}_{33,\overline{17}|} &= 5{,}511\,92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{>}_{33,\overline{17}|} &= 599{,}594(5)\,^0/_{00} \\ P^{>} \cdot a^{>}_{33,\overline{17}|} &= 276{,}206(7)\,^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {}_8V &= 323{,}387(8)\,^0/_{00} \qquad \underline{323{,}39\,^0/_{00}\,.} \end{aligned}$$

III. $\underline{m = 12}$

a) retrospektiv:

(ohne vorherige Berechnung der Barwerte)

$$\begin{aligned} S_{30} &= 9\,259\,722{,}43 \\ S_{37} &= 5\,597\,473{,}74 \\ 7 \cdot N_{37} &= 2\,892\,832{,}60 \\ \hline \text{Diff.} &= 769\,416{,}09 = h \\ N_{25} &= 800\,348{,}86 \\ N_{37} &= 413\,261{,}80 \\ \hline \text{Diff.} &= 387\,087{,}06 \\ \varepsilon \cdot h &= 38\,470{,}80 \\ \hline \text{Diff.} &= 348\,616{,}26 \\ D_{37} &= 23\,988{,}07 \\ r^{>}_{25,\overline{12}|} &= 14{,}532\,90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{35} &= 10\,515{,}0014 \\ M_{37} &= 10\,013{,}0294 \\ \hline \text{Diff.} &= 501{,}9720 \\ 1\tfrac{1}{2} \cdot [M_{30} - M_{35}] &= 2\,002{,}6845 \\ 2 \cdot [M_{25} - M_{30}] &= 3\,067{,}1148 \\ \hline \text{Summe} &= 5\,571{,}7713 \\ D_{37} &= 23\,988{,}07 \\ {}_{12}A^{>}_{25} \cdot {}_{12}\varphi_{25} &= 0{,}232\,272(6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P^{>} \cdot r^{>}_{25,\overline{12}|} &= 728{,}255(2)\,^0/_{00} \\ {}_{12}A^{>}_{25} \cdot {}_{12}\varphi_{25} &= 232{,}272(6)\,^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {}_{12}V &= 495{,}982(6)\,^0/_{00} \qquad \underline{495{,}98\,^0/_{00}\,.} \end{aligned}$$

b) prospektiv:

$$
\begin{aligned}
S_{37} &= 5\,597\,473{,}74\\
S_{50} &= 1\,819\,511{,}85\\
13 \cdot N_{50} &= 2\,260\,278{,}54\\
\hline
\text{Diff.} &= 1\,517\,683{,}35 = h_1\\
N_{37} &= 413\,261{,}80\\
N_{50} &= 173\,867{,}58\\
\hline
\text{Diff.} &= 239\,394{,}22 = h_2
\end{aligned}
$$

entweder:

$$
\begin{aligned}
P^{>} &= 50{,}1108(0)\ {}^0/_{00}\\
{}_{12}P^{>} &= 32{,}5720(2)\ {}^0/_{00}\\
\mu &= 2{,}50554\ {}^0/_{00}\\
\varepsilon' &= 0{,}0769\,231\\
\\
h_2 &= 239\,394{,}22\\
\varepsilon' \cdot h_1 &= 116\,744{,}91\\
\hline
\text{Diff.} &= 122\,649{,}31\\
D_{37} &= 23\,988{,}07\\
a^{>} &= 5{,}112\,92(9)
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\begin{aligned}
P^{>} &= 50{,}1108(0)\\
\varepsilon &= 0{,}05\\
(m-t) &= 7\\
h_1 &= 1\,517\,683{,}35\\
(m-t)\,h_2 &= 1\,675\,759{,}54\\
\hline
\text{Summe} &= 3\,193\,442{,}89 = h_3\\
\varepsilon \cdot h_3 &= 159\,672{,}14\\
h_2 &= 239\,394{,}22\\
\hline
\text{Diff.} &= 79\,722{,}08\\
D_{37} &= 23\,988{,}07\\
a^{>} &= 3{,}323\,40(5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{37} &= 10\,013{,}0294\\
M_{50} &= 6\,982{,}0017\\
\hline
\text{Diff.} &= 3\,031{,}0277\\
D_{50} &= 12\,861{,}58\\
\hline
\text{Summe} &= 15\,892{,}60(8)\\
D_{37} &= 23\,988{,}07\\
A_{37,\overline{13}|} &= 0{,}662\,521(3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_m &= 662{,}521(3)\ {}^0/_{00} & A_m &= 662{,}521(3)\ {}^0/_{00}\\
{}_{12}P^{>} \cdot a_m^{>} &= 166{,}538(4)\ {}^0/_{00} & P^{>} \cdot a_m^{>} &= 166{,}538(5)\ {}^0/_{00}\\
\hline
\text{Diff.} = {}_{12}V &= 495{,}982(9)\ {}^0/_{00} & \text{Diff.} = {}_{12}V &= 495{,}982(8)\ {}^0/_{00}
\end{aligned}
$$

Es ergibt sich also ein Deckungskapital von <u>485,98 $^0/_{00}$.</u>

Die Ergebnisse weichen nur um ganz geringfügige Beträge von einander ab.

$m = 16$

a. retrospektiv:

$$S_{30} = 9\,259\,722{,}43$$
$$S_{41} = 4\,084\,167{,}92$$
$$11 \cdot N_{41} = 3\,558\,451{,}60$$
$$\text{Diff.} = 1\,617\,102{,}91$$
$$D_{25} = 40\,448{,}62$$
$$a'_{25,\overline{16}|} = 39{,}979\,19$$
$$\varepsilon \cdot a'_{25,\overline{16}|} = 1{,}998\,96$$
$$a_{25,\overline{16}|} = 11{,}789\,11$$
$$\text{Diff.} = \overset{>}{a}_{25,\overline{16}|} = 9{,}790\,15$$
$$D_{41} = 19\,986{,}90$$
$${}_{16}E_{25} = 0{,}494\,130(6)$$
$$\overset{>}{r}_{25,\overline{16}|} = 19{,}812\,8(8)$$
$${}_{16}\varphi_{25} = 2{,}023\,75(6)$$

$$M_{35} = 10\,515{,}0014$$
$$M_{41} = 9\,047{,}4350$$
$$\text{Diff.} = 1\,467{,}5664$$
$$1\frac{1}{2} \cdot [M_{30} - M_{35}] = 2\,002{,}6845$$
$$2 \cdot [M_{25} - M_{30}] = 3\,067{,}1148$$
$$\text{Summe} = 6\,537{,}3657$$
$$D_{25} = 40\,448{,}62$$
$${}_{16}\overset{>}{A}_{25} = 0{,}161\,6214(7)$$
$$P^{>} \cdot \overset{>}{r}_{25,\overline{16}|} = 992\,839(3)\ {}^0/_{00}$$
$${}_{16}\overset{>}{A}_{25} \cdot {}_{16}\varphi_{25} = 327{,}082(4)\ {}^0/_{00}$$
$$\text{Diff.} = {}_{16}V = 665{,}756(9)\ {}^0/_{00}\,.$$

Es ergibt sich ein Deckungskapital von $\underline{665{,}76\ {}^0/_{00}}$.

b) prospektiv:
(mit unveränderlichem Minderungssatz)

$$(m - t) = 11$$

$$S_{41} = 4\,084\,167{,}92$$
$$S_{50} = 1\,819\,511{,}85$$
$$9 \cdot N_{50} = 1\,564\,808{,}22$$
$$\text{Diff.} = 699\,847{,}85$$
$$D_{41} = 19\,986{,}90$$
$$a'_{41,\overline{9}|} = 35{,}015\,33$$
$$(m - t)\, a_{41,\overline{9}|} = 82{,}349\,34$$
$$\text{Summe} = 117{,}364\,67 = h$$
$$\varepsilon \cdot h = 5{,}868\,23(4)$$
$$a_{41,\overline{9}|} = 7{,}486\,30(4)$$
$$\text{Diff.} = \overset{>}{a}_{41,\overline{9}|} = 1{,}618\,07(0)\,.$$

Der Barwert der Versicherung selbst kann hier ohne weiteres angegeben werden, da die künftige Leistung der Gesellschaft sich nicht mehr ändert.

$$A_{41,\overline{6}|} = 746{,}839(9)\ {}^0/_{00}$$
$$P^{>} \cdot \overset{>}{a}_{41,\overline{9}|} = 81{,}082(8)\ {}^0/_{00}$$
$$\text{Diff.} = {}_{16}V = 665{,}757(1)\ {}^0/_{00}\,.$$

Auch hier ergibt sich wieder ein Deckungskapital von $\underline{665{,}76\ {}^0/_{00}}$.

Aufgabe 83

In dem Beispiel der Aufgabe 75 sind die ersten 4 Deckungskapitale in der Weise nachzuprüfen, daß die Werte aus den Leistungen und Gegenleistungen stufenweise entwickelt werden. [Seite 118 und 119 des Lehrbuchs].

Es zahlen $l_{20} = 100\,000$ Personen die Prämie ${}_{40}{}^{3}P_{20} = 0{,}014\,7265$ ein. Im ganzen erhält die Gesellschaft also den Betrag 1472,65, den sie ein Jahr hindurch aufzinst. Am Ende des Jahres ist dann vorhanden der Betrag $1472{,}65 \cdot 1{,}035 = 1524{,}19$. Todesfallsummen werden nicht ausgezahlt. Der Betrag 1524,19 kann also unverkürzt auf die überlebenden Personen verteilt werden. Wenn aber für $l_{21} = 99\,081$ Personen ein Betrag von 1524,19 vorhanden ist, so hat der einzelne den Betrag $\frac{1524{,}19}{99\,081} = 0{,}015\,383(3)$ zu beanspruchen. Das Einzeldeckungskapital macht also $\underline{15{,}38\,^0/_{00}}$ aus.

Ist die Versicherung ohne Wartefrist abgeschlossen, so ist ${}_{40}P_{20} = 0{,}016\,0561$, also $l_{20} \cdot P = 1605{,}61$. Am Schlusse des Jahres ist dann vorhanden der Betrag $1605{,}61 \cdot 1{,}035 = 1661{,}81$. Nun ist für $d_{20} = 919$ Personen die Sterbfallsumme 1 auszuzahlen. Zur Verteilung an die überlebenden 99 081 Personen bleibt also übrig der Betrag $1661{,}81 - 919 = 742{,}81$, woraus dann für den einzelnen der Durchschnittsbetrag $\frac{742{,}81}{99081} = 0{,}007\,4970$, also ein Deckungskapital von $\underline{\underline{7{,}50\,^0/_{00}}}$ zurückgestellt werden kann.

Führt man die Berechnung in dieser Weise weiter, so ergibt sich

für die Versicherung mit Wartefrist:		für die Versicherung ohne Wartefrist:
0,014 7265	P	0,016 0561
1524,19	${}_1V \cdot l_{x+1}$	742,81
1459,12	$P \cdot l_{x+1}$	1590,85
2983,31	Summe $= h_1$	2333,66
3087,73	$h_1\,(1{,}035)$	2415,34
gleich null zu setzen	d_{x+1}	908
3087,73	Diff. $= h_2$	1507,34
98 173	l_{x+2}	98 173
0,031 452	${}_2V$	0,015 354
31,45 ‰		15,35 ‰
3087,73	${}_2V \cdot l_{x+2} = h_2$	1507,34
1445,74	$P \cdot l_{x+2}$	1576,28
4533,47	Summe $= h_3$	3083,62
4692,14	$h_3\,(1{,}035)$	3191,55
gleich null zu setzen	d_{x+2}	887
4692,14	Diff. $= h_4$	2304,55
97 286	l_{x+3}	97 286
0,048 230	${}_3V$	0,023 688
48,23 ‰		23,69 ‰
4692,14	${}_3V \cdot l_{x+3} = h_4$	2304,55
1432,68	$P \cdot l_{x+3}$	1562,03
6124,82	Summe $= h_5$	3866,58
6339,19	$h_5\,(1{,}035)$	4001,91
861	d_{x+3}	861
5478,19	Differenz	3140,91
96 425	l_{x+4}	96 425
0,056 813	${}_4V$	0,032 574
56,81 ‰		32,57 ‰.

Aufgabe 84

Wie gestaltet sich in dem Beispiel der Aufgabe 75 die Berechnung, wenn das Deckungskapital mit dem Satz von 12½ $^0/_{00}$ oder mit dem Satz des Zillmerschen Maximums „gezillmert“ wird? [Formeln (128) bis (132) und (135)].

Wird mit dem Satz von 12½ $^0/_{00}$ gezillmert, so ergibt sich folgendes:

$$\zeta = 12{,}5\,^0/_{00}$$
$$a_{20,\overline{40|}} = 19{,}07044$$
$$\frac{\zeta}{a_{20,\overline{40|}}} = 0{,}655\,4647\,^0/_{00}$$
$$\underline{0{,}6555\,^0/_{00}}$$

$$_{40}P_{20} = 16{,}0561\,^0/_{00}$$
$$_{40}P_{20}^{\zeta} = 16{,}7116\,^0/_{00}$$
$$^{3|}_{40}P_{20} = 14{,}7265\,^0/_{00}$$
$$^{3|}_{40}P_{20}^{\zeta} = 15{,}3820\,^0/_{00}\,.$$

a) *Versicherung mit Wartefrist:*

m	Bruchstrich I	Bruchstrich III	II · III	$_mV^\zeta$	
1	293,366 $^0/_{00}$	18,87638	290,356 $^0/_{00}$	3,010 $^0/_{00}$	3,01 $^0/_{00}$
2	306,442 „	18,67318	287,231 „	19,211 „	19,21 $^0/_{00}$
3	320,059 „	18,45852	283,929 „	36,130 „	! 36,13 $^0/_{00}$
4	325,290 „	18,23091	280,428 „	44,862 „	44,86 $^0/_{00}$.

Wieder stellt sich beim Uebergang vom dritten zum vierten Deckungskapital der Differenzensprung ein. Uebrigens ist zu beachten, daß das sogenannte nullte Deckungskapital hier nicht gleich null, sondern gleich $-12{,}50\,^0/_{00}$ ist. Die Differenzenreihe beginnt also mit dem Wert $(3{,}01\,\%) - (-12{,}50\,^0/_{00}) = +15{,}51\,^0/_{00}$.

b) *Versicherung ohne Wartefrist:*

m	Bruchstrich I	Bruchstrich III	II · III	$_mV^\zeta$	
1	310,577 $^0/_{00}$	18,87638	315,455 $^0/_{00}$	− 4,878 $^0/_{00}$	− 4,88 $^0/_{00}$
2	315,172 „	18,67318	312,059 „	+ 3,113 „	+ 3,11 $^0/_{00}$
3	320,059 „	18,45852	308,471 „	11,588 „	11,59 $^0/_{00}$
4	325,290 „	18,23091	304,668 „	20,622 „	20,62 $^0/_{00}$.

Hier verlaufen die Differenzen wieder regelmäßig. Das erste Deckungskapitel aber wird negativ. Nach dem von Zillmer angegebenen Grundsatz darf also im zweiten Falle nicht mit einem Abzugssatz von $12\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ gerechnet werden. Im ersten Falle kann der Satz aber sogar höher bemessen sein.

Prüft man zunächst die Deckungskapitale, indem man sie retrospektiv berechnet, so erhält man:

Versicherung mit Wartefrist:

m	D_{x+m}	$(N_x - N_{x+m}) = h_1$	$(M_x - M_{x+m}) = h_2$	$\frac{h_1}{D_{x+m}} = r_{x,\overline{m}\rceil}$	$\frac{h_2}{D_{x+m}} = {}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x$	${}_m\varphi_x$
1	48 110,85	50 256,59	446,2397	1,044 600	0,009 2752(4)	1,044 600
2	46 057,92	98 367,44	872,2284	2,135 733	0,018 9376(4)	1,091 161
3	44 098,34	144 425,36	1274,2927	3,275 075	0,028 8966(1)	1,139 648
4	42 230,01	188 523,70	1651,3738	4,464 212	0,039 1042(7)	1,190 068

m	$P^\zeta \cdot r_{x,\overline{m}\rceil}$	${}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x$	$\zeta \cdot {}_m\varphi_x$	${}_mV^\zeta$	
1	16,068°/oo	gleich null zu setzen	13,057°/oo	3,011°/oo	3,01°/oo
2	32,852 „	„ „ „ „	13,640 „	19,212 „	19,21°/oo
3	50,377 „	„ „ „ „	14,246 „	36,131 „	36,13°/oo
4	68,668 „	8,929°/oo	14,876 „	44,863 „	44,86°/oo .

Zu beachten ist, daß der 4. Wert in der Reihe ${}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x$ nicht aus der vorher berechneten Zusammenstellung entnommen werden kann. Da nämlich hier in den ersten 3 Jahren kein Wagnis getragen wird, gilt statt des Wertes der Zusammenstellung der besondere Wert

$$_{3\,}{}_mA_x \cdot {}_m\varphi_x = \frac{C_{x+3}}{D_{x+4}} = \frac{M_{23} - M_{24}}{D_{24}} = \frac{377{,}0811}{42\,230{,}01}\,.$$

Versicherung ohne Wartefrist:

m	$r_{x,\overline{m}\rceil}$	$P^\zeta \cdot r_{x,\overline{m}\rceil}$	$[{}_mA_x + \zeta]\,{}_m\varphi_x$	${}_mV^\zeta$	
1	1,044 600	17,457°/oo	22,333°/oo	− 4,876	− 4,88°/oo
2	2,135 733	35,692 „	32,577 „	+ 3,115	+ 3,11°/oo
3	3,275 075	54,732 „	43,142 „	11,590	11,59°/oo
4	4,464 212	74,604 „	53,980 „	20,624	20,62°/oo .

Zur Bestimmung des Zillmerschen Maximums hat man, wenn man prospektiv rechnet, zunächst Π_x zu berechnen. Es ist

$$\begin{array}{r}
v = 0{,}966\,183\,575 \\
\dfrac{D_{21}}{D_{20}} = \dfrac{1}{\varphi_{20}} = 0{,}957\,304\,305 \\
\hline
\text{Diff.} = \Pi_{20} = 0{,}008\,879\,270
\end{array}$$

Probe!

$$\begin{array}{r}
q_{20} = 0{,}009\,1900 \\
v\,q_{20} = 0{,}008\,8792(3)\,.
\end{array}$$

Weiter ergibt sich:

$$a_{20,\overline{40}|} = 19{,}070\,44$$

$$\frac{a}{a-1} = 1{,}055\,339 = h\ .$$

mit Wartefrist:	*ohne Wartefrist:*
${}^{3|}_{40}P_{20} = 14{,}7265\,^0/_{00}$	${}_{40}P_{20} = 16{,}0561\,^0/_{00}$
Π_{20} gleich null zu setzen	$\Pi_{20} = 8{,}8792\,^0/_{00}$
Diff. $= 14{,}7265\,^0/_{00}$	Diff. $= 7{,}1769\,^0/_{00}$

$$h = 1{,}055\,339$$

$u = 15{,}5414(5)\,^0/_{00}$	$u = 7{,}5740(6)\,^0/_{00}$
$\underline{15{,}54\,^0/_{00}}$	$\underline{7{,}57\,^0/_{00}}$.

Rechnet man retrospektiv, so findet man:

mit Wartefrist:	*ohne Wartefrist:*
$M_{23} = 14\,114{,}0906$	$M_{21} = 14\,942{,}1436$
$D_{21} = 48\,110{,}85$	$D_{21} = 48\,110{,}85$
${}_{2|}A_{21} = 0{,}293\,3660$	$A_{21} = 0{,}310\,5774$
$a_{21,\overline{39}|} = 18{,}876\,38$	$a_{21,\overline{39}|} = 18{,}876\,38$
${}^{2|}_{39}P_{21} = 0{,}015\,5414$	${}_{39}P_{21} = 0{,}016\,4532$
${}^{3|}_{40}P_{20} = 0{,}014\,7265$	${}_{40}P_{20} = 0{,}016\,0561$
Diff. $= 0{,}000\,8149$	Diff. $= 0{,}000\,397$
$a_{20,\overline{40}|} = 19{,}070\,44$	$a_{20,\overline{40}|} = 19{,}070\,44$
$\underline{u = 15{,}54\,^0/_{00}}$	$\underline{u = 7{,}57\,^0/_{00}}$.

Man könnte also für die Versicherung mit Wartefrist einen Abzugssatz von $15\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ festsetzen, während man sich für die regelrechte Versicherung mit einem Zillmersatz von $7\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ begnügen müßte.

Es ergibt sich dann weiter für die Versicherung mit Wartefrist:

$$\zeta = 0{,}0155 = 15{,}5\,^0/_{00}$$
$$a_{20,\overline{40}|} = 19{,}070\,44$$
$$\frac{\zeta}{a_{20,\overline{40}|}} = 0{,}812\,7762\,^0/_{00}$$
$$\underline{0{,}8128\,^0/_{00}}$$
$${}^{3|}_{40}P^{\zeta}_{20} = 15{,}5393\,^0/_{00}\,.$$

a) prospektiv:

m	Bruchstrich I	Bruchstrich II • III	${}_mV^{\zeta}$	
1	293,366 ‰	293,326 ‰	0,040 ‰	0,04 ‰
2	306,442 „	290,168 „	16,274 „	16,27 ‰
3	320,059 „	286,832 „	33,227 „	33,23 ‰
4	325,290 „	283,296 „	41,994 „	41,99 ‰ .

b) retrospektiv:

m	$P^{\zeta} \cdot r_{x,\overline{m}|}$	$[{}_mA_x + \zeta] \cdot {}_m\varphi_x$	${}_mV^{\zeta}$	
1	16,232 ‰	16,191 ‰	0,041 ‰	0,04 ‰
2	33,188 „	16.913 „	16,275 „	16,27 ‰
3	50,892 „	17,665 „	33,227 „	33,23 ‰
4	69,371 „	27,375 „	41,996 „	42,00 ‰ .

Abweichungen um $0{,}01\,^0/_{00}$ können sich sehr leicht einstellen, wenn einmal prospektiv, ein andermal retrospektiv gerechnet wird, und wenn dann nachträglich abgerundet wird.

Für die Versicherung ohne Wartefrist erhält man:

$$\zeta = 0{,}0075 = 7{,}5\,^0/_{00}$$
$$a_{20,\overline{40}|} = 19{,}070\,44$$
$$\frac{\zeta}{a_{20,\overline{40}|}} = 0{,}393\,2788\,^0/_{00}$$
$$\underline{0{,}3933\,^0/_{00}}$$
$${}_{40}P^{\zeta}_{20} = 16{,}4494\,^0/_{00}\,.$$

a) prospektiv:

m	Bruchstrich I	Bruchstrich II · III	$_mV^\zeta$	
1	310,577 ‰	310,505 ‰	0,072 ‰	0,07 ‰
2	315,172 „	307,163 „	8,009 „	8,01 ‰
3	320,059 „	303,632 „	16,427 „	16,43 ‰
4	325,290 „	299,888 „	25,402 „	25,40 ‰ .

b) retrospektiv:

m	$P^\zeta \cdot r_{x,\overline{m}\rceil}$	$[_mA_x + \zeta] \cdot {_m\varphi_x}$	$_mV^\zeta$	
1	17,183 ‰	17,110 ‰	0,073 ‰	0,07 ‰
2	35,132 „	27,121 „	8,011 „	8,01 ‰
3	53,873 „	37,444 „	16,429 „	16,43 ‰
4	73,434 „	48,030 „	25,404 „	25,40 ‰ .

Für $m = 1$ muß, wenn die genauen Werte $\zeta = 0{,}01554$ und $\zeta = 0{,}00757$ benutzt werden, selbstverständlich $_mV^\zeta = 0$ werden. In der Tat ergibt sich:

Versicherung mit Wartefrist:	*Versicherung ohne Wartefrist:*
$\zeta = 15{,}54\,^0/_{00}$	$\zeta = 7{,}57\,^0/_{00}$
$a_{20,\overline{40}\rceil} = 19{,}070\,44$	$a_{20,\overline{40}\rceil} = 19{,}070\,44$
$^{3\vert}_{40}P^\zeta_{20} = 15{,}541(4)\,^0/_{00}$	$_{40}P^\zeta_{20} = 16{,}453(0)$
$A_{x+1} = 293{,}36(6)\,^0/_{00}$	$A_{x+1} = 310{,}57(7)\,^0/_{00}$
$P^\zeta \cdot a_{x+1} = 293{,}36(5)\,^0/_{00}$	$P^\zeta \cdot a_{x+1} = 310{,}57(3)\,^0/_{00}$
$P^\zeta \cdot r_{x,\overline{1}\rceil} = 16{,}23(5)\,^0/_{00}$	$P^\zeta \cdot r_{x,\overline{1}\rceil} = 17{,}18(7)\,^0/_{00}$
$[_1A_x + \zeta] \cdot \varphi_x = 16{,}23(3)\,^0/_{00}$	$[_1A_x + \zeta] \cdot \varphi_x = 17{,}18(3)\,^0/_{00}$.

In allen Fällen ergibt sich bis auf geringfügige Abweichungen der Unterschied null. Die Abweichungen fallen noch kleiner aus, wenn man die genaueren Werte von ζ und P^ζ verwendet.

Auch hier können die Ergebnisse in der Weise geprüft werden, daß das Deckungskapital aus den Grundzahlen aufgebaut wird.

Wird mit einem Satz von $12\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ „gezillmert", so ergibt sich:

für die Versicherung mit Wartefrist:		für die Versicherung ohne Wartefrist:
0,015 3820	P^{ζ}	0,016 7116
0.002 8820	$[P^{\zeta} - \zeta]$	0,004 2116
288,20	$[P^{\zeta} - \zeta] \cdot l_{20} = h_1$	421,16
298,29	$h_1 [1,035]$	435,90
gleich null zu setzen	d_{20}	919
298,29	Diff. $= h_2$	— 483,10
99 081	l_{21}	99 081
0,003 011	${}_1V^{\zeta}$	— 0,004 876
3,01 ‰		— 4,88 ‰
298,29	${}_1V^{\zeta} \cdot l_{21} = h_2$	— 483,10
1524,06	$P^{\zeta} \cdot l_{21}$	1655,80
1822,35	Summe $= h_3$	1172,70
1886,13	$h_3 (1,035)$	1213,74
gleich null zu setzen	d_{21}	908
1886,13	Diff. $= h_4$	305,74
98 173	l_{22}	98 173
0,019 212	${}_2V^{\zeta}$	0,003 114
19,21 ‰		3,11 ‰ .
1886,13	${}_2V^{\zeta} \cdot l_{22} = h_4$	305,74
1510,10	$P^{\zeta} \cdot l_{22}$	1640,63
3396,23	Summe $= h_5$	1946,37
3515,10	$h_5 (1,035)$	2014,49
gleich null zu setzen	d_{22}	887
3515,10	Diff. $= h_6$	1127,49
97 286	l_{23}	97 286
0,036 134	${}_3V^{\zeta}$	0,011 589
36,13 ‰		11,59 ‰
3515,10	${}_3V^{\zeta} \cdot l_{23} = h_6$	1127,49
1496,45	$P^{\zeta} \cdot l_{23}$	1625,80
5011,55	Summe $= h_7$	2753,29

für die Versicherung mit Wartefrist		für die Versicherung ohne Wartefrist
5186,95	$h_7\,(1{,}035)$	2849,66
861	d_{23}	861
4325,95	Diff. $= h_8$	1988,66
96 425	l_{24}	96 425
0,044 863	${}_4V^{\zeta}$	0,020 624
44,86 ‰		20,62 ‰ .

Wird (nahezu) mit dem Satz des Zillmerschen Maximums gezillmert, so ergibt sich:

für die Versicherung mit Wartefrist:		für die Versicherung ohne Wartefrist:
0,0155	ζ	0,0075
0,015 5393	P^{ζ}	0,016 4494 .

Die mit dem genauen Satz „gezillmerte“ Prämie bezeichnet man als Zillmersche Reserveprämie.

Weiter ist dann:

0,000 0393	$[P^{\zeta} - \zeta]$	0,008 9494
3,93	$[P^{\zeta} - \zeta] \cdot l_{20} = h_1$	894,94
4,07	$h_1\,(1{,}035)$	926,26
gleich null zu setzen	d_{20}	919
4,07	Diff $= h_2$	7,26
99 081	l_{21}	99 081
0,000 041	${}_1V^{\zeta}$	0,000 073
0,04 ‰		0,07 ‰
4,07	${}_1V^{\zeta} \cdot l_{21} = h_2$	7,26
1539,65	$P^{\zeta} \cdot l_{21}$	1629,82
1543,72	Summe $= h_3$	1637,08
1597,75	$h_3\,(1{,}035)$	1694,38
gleich null zu setzen	d_{21}	908
1597,75	Diff. $= h_4$	786,38
98 173	l_{22}	98 173

für die Versicherung mit Wartefrist		für die Versicherung ohne Wartefrist
0,016 275	${}_2V^{\zeta}$	0,008 010
16,27 ‰		8,01 ‰
1597,75	${}_2V^{\zeta} \cdot l_{22} = h_4$	786,38
1525,54	$P^{\zeta} \cdot l_{22}$	1614,89
3123,29	Summe $= h_5$	2401,27
3232,60	$h_5\,(1{,}035)$	2485,31
gleich null zu setzen	d_{22}	887
3232,60	Diff. $= h_6$	1598,31
97 286	l_{23}	97 286
0,033 228	${}_3V^{\zeta}$	0,016 429
33,23 ‰		16,43 ‰
3232,60	${}_3V^{\zeta} \cdot l_{23} = h_6$	1598,31
1511,76	$P^{\zeta} \cdot l_{23}$	1600,30
4744,36	Summe $= h_7$	3198,61
4910,41	$h_7\,(1{,}035)$	3310,56
861	d_{23}	861
4049,41	Diff. $= h_8$	2449,56
96 425	l_{24}	96 425
0,041,995	${}_4V^{\zeta}$	0,025 404
42,— ‰		25,40 ‰ .

Aufgabe 85

Auf das Leben eines 42jährigen ist eine gemischte Versicherung über 20 000 Mark mit 23jähriger Dauer abgeschlossen worden. Die Bruttoprämie ist ohne Abstufung des Aufschlags aus der Nettoprämie mit einem Zuschlag von 10% berechnet worden. Nach 5 Jahren wird die Prämienzahlung eingestellt. Die Versicherung soll zurückgekauft oder in eine prämienfreie

Versicherung umgewandelt werden. Im ersten Falle sollen 75% des Deckungskapitals erstattet werden. Im zweiten Falle ist zu untersuchen, welche prämienfreie Summe sich ergibt, wenn entweder der Rückkaufswert als Nettoeinlage oder das Deckungskapital als Bruttoeinlage verwendet wird, oder wenn die Summe im Verhältnis der Anzahl der geleisteten zur Anzahl der bedungenen Prämien herabgesetzt wird. Die Gesellschaft „zillmert" mit einem Satz von $12\frac{1}{2}\,^0/_{00}$. Welche Werte ergeben sich und wie hoch stellt sich der Rückkaufswert im Verhältnis zu den eingezahlten Prämien (die am Gewinn nicht beteiligt sind), wenn auch berücksichtigt wird, was inzwischen an Wagnisprämien verbraucht worden ist? Zur Berechnung der prämienfreien Summe soll ein Aufschlag von $3\,^0/_{00}$ der Versicherungssumme, geltend für die fernere Dauer der Versicherung, zur Nettoprämie hinzugefügt werden. [Formeln (133), (134) und (136) bis (138)].

Zunächst ist:

$$
\begin{aligned}
A_{42,\overline{23}|} &= 536{,}1254\,^0/_{00} \\
a_{42,\overline{23}|} &= 13{,}717\,43 \\
P_{42,\overline{23}|} &= 39{,}083\,52\,^0/_{00} \\
\underline{0{,}10 \cdot P_{42,\overline{23}|}} &= \underline{3{,}908\,35\,^0/_{00}} \\
\mathfrak{p}_{42,\overline{23}|} &= 42{,}991\,87 \qquad \underline{43{,}—\,^0/_{00}.} \\
\zeta &= 0{,}0125 \\
a_{47,\overline{18}|} &= 11{,}668\,29 \\
a_{42,\overline{23}|} &= 13{,}717\,43 \\
\text{Quotient} &= 0{,}850\,6178 = h \\
(1+\zeta)\cdot h &= 0{,}861\,2505 \\
{}_5V^{\zeta} &= 0{,}138\,7495 \qquad \underline{138{,}75\,^0/_{00}.}
\end{aligned}
$$

Für 20000 Mk. Versicherungssumme ist also nach 5 Jahren vorhanden ein Deckungskapital von 2775 Mk. An Prämien ist eingezahlt ein Betrag von 5mal 860 Mk. gleich 4300 Mk.

Zur Bestimmung des verausgabten Betrages an Wagnisprämien sind die ersten 5 Deckungskapitale zu berechnen. Es ist:

m	$a_{x+m,\,\overline{n-m}\rceil}$	$\frac{a_{x+m,\,\overline{n-m}\rceil}}{a_{x,\,\overline{n}\rceil}} = {}_m h$	${}_m h\,(1+\zeta)$	${}_m V^{\zeta}$	
1	13,33313	0,971 9845	0,984 1343	0,015 8657	15,87‰
2	12,93699	0,943 1060	0,954 8948	0,045 1052	45,11‰
3	12,52840	0,913 3198	0,924 7363	0,075 2637	75,26‰
4	12,10591	0,882 5203	0,893 5518	0,106 4482	106,45‰
5	11,66829	0,850 6178	0,861 2505	0,138 7495	138,75‰.

Prüft man die „ungezillmerten" Deckungskapitale, die sich aus der Zusammenstellung ohne weiteres ergeben, indem man sie prospektiv [mit der Formel (121$\underline{^a}$)] nachrechnet, so findet man:

m	$(1 - {}_m h) = {}_m V$	$A_{x+m,\,\overline{n-m}\rceil}$	$P \cdot a_{x+m,\,\overline{n+m}\rceil}$	${}_m V$	
1	0,028 0155	549,1211‰	521,1057‰	28,0154‰	28,02‰
2	0,056 8940	562,5171 „	505,6231 „	56,8940 „	56,89‰
3	0,086 6802	576,3342 „	489,6540 „	86,6802 „	86,68‰
4	0,117 4797	590,6213 „	473,1416 „	117,4797 „	117,48‰
5	0,149 3822	605,4201 „	456,0378 „	149,3823 „	149,38‰.

Man kann die Deckungskapitale nun zweckmäßig in der Weise „zillmern", daß man sie zunächst zur Einheit ergänzt, von dem Ergänzungsbetrag 12½ ‰ berechnet und diesen Wert dann vom vollen Deckungskapital abzieht. Statt dessen kann man auch das volle Deckungskapital zunächst um den Satz von 12½ ‰ der Versicherungssumme mindern, dann aber zu dem gekürzten Betrag wieder 12½ ‰ des vollen Deckungskapitals hinzufügen. Es ergeben sich da die beiden Rechenformeln:

(133$\underline{^a}$) $$V^{\zeta} = V - \zeta \cdot [1 - V]$$

und:

(133$\underline{^b}$) $$V^{\zeta} = V - \zeta + \zeta \cdot V,$$

die ja miteinander gleichbedeutend sind.

Die Rechenformeln beruhen natürlich auf der Formel (133). Denn es ist:

$$ {}_mV_x^\zeta = 1 - [1+\zeta]\,\frac{a_{x+m,\,\overline{n-m}|}}{a_{x,\,\overline{n}|}} $$

$$ {}_mV_x^\zeta = \left[1 - \frac{a_{x+m,\,\overline{n-m}|}}{a_{x,\,\overline{n}|}}\right] - \zeta\cdot\frac{a_{x+m,\,\overline{n-m}|}}{a_{x,\,\overline{n}|}} $$

$$ {}_mV_x^\zeta = \left[1 - \frac{a_{x+m,\,\overline{n-m}|}}{a_{x,\,\overline{n}|}}\right] - \zeta + \zeta\cdot\left[1 - \frac{a_{x+m,\,\overline{n-m}|}}{a_{x,\,\overline{n}|}}\right] $$

$$ {}_mV_x^\zeta = {}_mV_x - \zeta + \zeta\cdot{}_mV_x\,. $$

Dieses Verfahren kann also nur angewendet werden, wenn die Prämienzahlungsdauer mit der Versicherungsdauer zusammenfällt und wenn es sich um unveränderliche Leistungen und Gegenleistungen handelt, d. h. bei der Versicherung auf Lebenszeit mit lebenslänglicher Prämienzahlung und bei der gemischten Versicherung in ihrer regelrechten Form. Andernfalls kann das Verfahren nur als Näherungsverfahren Anwendung finden, was in der Praxis zwar häufig geschieht, aber nicht immer ganz unbedenklich ist. Jedenfalls soll man es nicht anwenden, wenn die fernere Prämienzahlungsdauer von der ferneren Versicherungsdauer sehr verschieden ist.

„Zillmert" man im vorliegenden Falle mit der Hilfsformel, so erhält man entweder:

m	${}_mV$	$(1 \overset{*)}{-} {}_mV)$	$\zeta\cdot(1-{}_mV)$	${}_mV^\zeta$	
1	28,0154 ‰	971,9846 ‰	12,1498 ‰	15,8656 ‰	15,87 ‰
2	56,8940 „	943,1060 ‰	11,7888 „	45,1052 „	45,11 ‰
3	86,6802 „	913,3198 „	11,4165 „	75,2637 „	75,26 ‰
4	117,4797 „	882,5203 „	11,0315 „	106,4482 „	106,45 ‰
5	149,3823 „	850,6177 „	10,6327 „	138,7496 „	138,75 ‰,

*) Die Einheit ist hier natürlich gleich 1000 zu setzen.

oder man erhält:

m	${}_mV - \zeta$	$\zeta \cdot {}_mV$	${}_mV^\zeta$	
1	15,5154 ‰	0,3502 ‰	15,8656 ‰	15,87 ‰
2	44,3940 „	0,7112 „	45,1052 „	45,11 ‰
3	74,1802 „	1,0835 „	75,2637 „	75,26 ‰
4	104,9797 „	1,4685 „	106,4482 „	106,45 ‰
5	136,8823 „	1,8673 „	138,7496 „	138,75 ‰.

Uebrigens ist $P^\zeta = \frac{A + \zeta}{a} = 39{,}99477\ ^0/_{00}$.

Es sind nun die tatsächlich aufgewendeten Wagnisprämien zu berechnen.

Wäre nicht „gezillmert“ worden, so ergäbe sich:

m	${}_{m-1}V + P$	$v \cdot {}_mV$	${}_m\Pi$	
1	39,0835 ‰	27,0680 ‰	12,0155 ‰	12,01 ‰
2	67,0989 „	54,9700 „	12,1289 „	12,13 „
3	95,9775 „	83,7490 „	12,2285 „	12,23 „
4	125,7637 „	113,5070 „	12,2567 „	12,26 „
5	156,5632 „	144,3307 „	12,2325 „	12,23 „
		zusammen:	60,8621 ‰	60,86 ‰.

Da aber mit $12\frac{1}{2}\ ^0/_{00}$ „gezillmert“ wird, wobei dann ${}_0V^\zeta = -12{,}50\ ^0/_{00}$ zu setzen ist, so ergeben sich die folgenden Werte:

m	${}_{m-1}V^\zeta + P^\zeta$	$v \cdot {}_mV^\zeta$	${}_m\Pi$	
1	27,4948 ‰	15,3291 ‰	12,1657 ‰	12,17 ‰
2	55,8604 „	43,5799 „	12,2805 „	12,28 „
3	85,1000 „	72,7186 „	12,3814 „	12,38 „
4	115,2585 „	102,8485 „	12,4100 „	12,41 „
5	146,4430 „	134,0576 „	12,3854 „	12,38 „
		zusammen:	61,6230 ‰	61,62 ‰.

Für 20 000 Mk. Versicherungssumme sind also rechnungsmäßig während der ersten 5 Jahre 1232,40 Mk. an Wagnisprämien verbraucht worden. Eingezahlt hat der Versicherte bis dahin im ganzen 4300 Mk. Läßt

man die Zinsen unberücksichtigt, d. h. vernachlässigt man sie, weil man anderseits doch auch die Verwaltungskosten nicht zu berücksichtigen pflegt, so kommt man zu dem Ergebnis, daß als Maßstab für die größere oder geringere Höhe der Kündigungswerte nur der Betrag von 4300 Mk. — 1232,40 Mk. = 3067,60 Mk. zugrunde gelegt werden kann.

Weiter ergibt sich dann:

$$_5V^{\zeta} = 138{,}7496\ ^0/_{00}$$
$$0{,}75\ _5V^{\zeta} = 104{,}0622\ ^0/_{00} \qquad \underline{104{,}06\ ^0/_{00}}\,.$$

Der Rückkaufswert beläuft sich also auf 2081,20 Mk. für 20 000 Mk. Versicherungssumme. Das sind nur 48,4 % der tatsächlich geleisteten Einlagen, aber immerhin 67,8 % der um die Wagnisbeiträge verminderten Einlagen.

Die prämienfreie Versicherungssumme wäre folgendermaßen zu bestimmen:

I. $$W^{I} = \frac{0{,}75 \cdot {}_mV^{\zeta}}{A_{x+m,\, \overline{n-m}|}}$$
$$0{,}75 \cdot {}_5V^{\zeta} = 104{,}0622\ ^0/_{00}$$
$$A_{47,\overline{18}|} = 0{,}605\,4201$$
$$W^{I} = 171{,}8843\ ^0/_{00} \qquad \underline{171{,}88\ ^0/_{00}}\,.$$

II. $$W^{II} = \frac{{}_mV^{\zeta}}{A_{x+m,\, \overline{n-m}|} + \beta \cdot a_{x+m,\, \overline{n-m}|}}$$
$$\beta = 0{,}003$$
$$A_{47,\overline{18}|} = 0{,}605\,4201$$
$$a_{47,\overline{18}|} = 11{,}668\,29$$
$$\text{Nenner} = 0{,}640\,4250$$
$$\text{Zähler} = 138{,}7496\ ^0/_{00}$$
$$W^{II} = 216{,}6524\ ^0/_{00} \qquad \underline{216{,}65\ ^0/_{00}}\,.$$

III. $$W^{III} = \frac{m}{n} \cdot \mathcal{S}$$
$$m = 5$$
$$n = 23$$
$$\mathcal{S} = 1$$
$$W^{III} = 217{,}3913\ ^0/_{00} \qquad \underline{217{,}39\ ^0/_{00}}\,.$$

Der Wert W^{I} bleibt merklich hinter den beiden anderen Werten zurück, wogegen aber vom Standpunkte der Technik nichts einzuwenden ist. Erst nach längerer Dauer mildern sich die Unterschiede, nachdem sie zunächst sogar noch bedeutend größer geworden sind.

So ergeben sich zum Beispiel nach 10, 15 und 20 Jahren die folgenden Werte.

a) $\underline{m = 10}$.

$a_{52,\overline{13}|} = 9{,}250\,085$ $\qquad (1+\zeta)\cdot h = 0{,}682\,7599$

$a_{42,\overline{23}|} = 13{,}717\,43$ $\qquad {}_{10}V^{\zeta} = 0{,}317\,2401$

Quotient $= 0{,}674\,3308 = h$ $\qquad \underline{317{,}24\,^0/_{00}}$.

Der Rückkaufswert sei wieder berechnet zum Satze von 75 %. Er beläuft sich dann auf $\underline{237{,}93\,^0/_{00}}$. Weiter ist dann:

I. $\qquad A_{52,\overline{13}|} = 0{,}687\,1951$

$W^{I} = 346{,}2336\,^0/_{00} \qquad \underline{346{,}23\,^0/_{00}}$.

II. $\qquad A_{52,\overline{13}|} + \beta \cdot a_{52,\overline{13}|} = 0{,}714\,9454$

$W^{II} = 443{,}7263\,^0/_{00} \qquad \underline{443{,}73\,^0/_{00}}$.

III. $\qquad W^{III} = \frac{10}{23} = 0{,}434\,7826 \qquad \underline{434{,}78\,^0/_{00}}$.

b) $\underline{m = 15}$.

$a_{57,\overline{8}|} = 6{,}385\,338$ $\qquad (1+\zeta)\cdot h = 0{,}471\,3094$

$a_{42,\overline{23}|} = 13{,}717\,43$ $\qquad {}_{15}V^{\zeta} = 0{,}528\,6906$

Quotient $= 0{,}465\,4908 = h$ $\qquad \underline{528{,}69\,^0/_{00}}$.

Hier sei mit einem Rückkaufssatz von 76 % gerechnet. Es ergibt sich dann ein Rückkaufswert von $\underline{401{,}80\,^0/_{00}}$. Weiter ist dann:

I. $\qquad A_{57,\overline{8}|} = 0{,}784\,0707$

$W^{I} = 512{,}4538\,^0/_{00} \qquad \underline{512{,}45\,^0/_{00}}$.

II. $\qquad A_{57,\overline{8}|} + \beta \cdot a_{57,\overline{8}|} = 0{,}803\,2267$

$W^{II} = 658{,}2077\,^0/_{00} \qquad \underline{658{,}21\,^0/_{00}}$.

III. $\qquad W^{III} = \frac{15}{23} = 0{,}652\,1739 \qquad \underline{652{,}17\,^0/_{00}}$.

c) $\underline{m = 20}$.

$a_{62,\overline{3}|} = 2{,}784\,237$ $\quad(1 + \zeta) \cdot h = 0{,}205\,5078$

$a_{42,\overline{23}|} = 13{,}717\,43$ $\quad{}_{20}V^{\zeta}_{5} = 0{,}794\,4922$

Quotient $= 0{,}202\,9707 = h$ $\quad\underline{794{,}49\,{}^0/_{00}}$.

Hier ist natürlich schon mit einem wesentlich höheren Rückkaufssatz zu rechnen. Es sei ein Satz von 89½% zu nehmen! Der Rückkaufswert beläuft sich dann auf $\underline{711{,}07\,{}^0/_{00}}$.

Weiter ist dann:

I. $A_{62,\overline{3}|} = 0{,}905\,8471$

$W^{I} = 784{,}9780\,{}^0/_{00}$ $\quad\underline{784{,}98\,{}^0/_{00}}$.

II. $A_{62,\overline{3}|} + \beta \cdot a_{62,\overline{3}|} = 0{,}914\,1998$

$W^{II} = 869{,}0551\,{}^0/_{00}$ $\quad\underline{869{,}06\,{}^0/_{00}}$.

III. $W^{III} = \frac{20}{23} = 0{,}869\,5652$ $\quad\underline{869{,}57\,{}^0/_{00}}$.

Die Ergebnisse lassen erkennen, daß die zweite und dritte Berechnungsart dauernd günstige Werte liefert.

Aufgabe 86

Die in dem Beispiel der Aufgabe 44 behandelte Versicherung soll nach 10 Jahren zurückgekauft oder in eine prämienfreie Versicherung umgewandelt werden. Als Rückkaufssatz gilt ein Satz von 80% des Deckungskapitals. Es wird nicht „gezillmert". Wie können die Werte bemessen werden?
[Formeln (121a), (125) und (136) bis (139)].

Die Nettoprämie setzt sich zusammen aus zwei Teilen, einer Prämie für die Todesfallversicherung und einer Prämie für die Lebensfallversicherung. Es ist:

$$P = P_1 + P_2$$

$$P_1 = \frac{M_{35}}{N_{35} - N_{55}} \qquad P_2 = \frac{\frac{1}{2} D_{55}}{N_{35} - N_{55}}$$

$$M_{35} = 10\,515{,}0014$$
$$\frac{1}{2} D_{55} = 4\,876{,}6475$$
$$(N_{35} - N_{55}) = 348\,605{,}83$$

$\underline{P_1 = 30{,}16\,301\ ^0/_{00}}$ $\quad\quad$ $\underline{P_2 = 13{,}98\,900\ ^0/_{00}}$.

Es ergibt sich nun für die Todesfallversicherung:

$$A_{45} = \frac{M_{45}}{D_{45}} = \frac{8\,108{,}2696}{16\,525{,}11} = 0{,}490\,6636$$
$$a_{45,\overline{10|}} = 8{,}044\,216$$
$$A_{45} = 490{,}6636\ ^0/_{00}$$
$$\underline{P_1 \cdot a_{45,\overline{10|}} = 242{,}6378\ ^0/_{00}}$$
$$\text{Diff.} = {}_{10}V_1 = 248{,}0258\ ^0/_{00} \qquad \underline{248{,}03\ ^0/_{00}}.$$

Für die Lebensfallversicherung ergibt sich:

$$a_{35,\overline{10|}} = 8{,}223\,939 \qquad D_{45} = 16\,525{,}11$$
$${}_{10}\varphi_{35} = 1{,}586\,990 \qquad D_{35} = 26\,225{,}18$$
$$r_{35,\overline{10|}} = 13{,}051\,31 \qquad {}_{10}E_{35} = 0{,}630\,1238$$
$$P_2 = 13{,}98900\ ^0/_{00}$$
$$P_2 \cdot r_{35,\overline{10|}} = {}_{10}V_2 = 182{,}5748\ ^0/_{00} \qquad \underline{182{,}57\ ^0/_{00}}.$$

Zur Probe!

$$a_{35,\overline{20|}} = 13{,}292\,79 \qquad D_{55} = 9\,753{,}295$$
$${}_{20}\varphi_{35} = 2{,}688\,854 \qquad D_{35} = 26\,225{,}18$$
$$r_{35,\overline{20|}} = 35{,}742\,37 \qquad {}_{20}E_{35} = 0{,}371\,9057$$

$${}_{10}V'_2 = \frac{r_{35,\overline{10|}}}{r_{35,\overline{20|}}} = \frac{13{,}051\,31}{35{,}742\,37} = 0{,}365\,1495(4)\,.$$

Dieses Deckungskapital V'$_2$ gilt aber für die Einheit der Summe. Da im vorliegenden Falle jedoch nur die halbe Einheit als Lebensfallsumme festgesetzt ist, so ergibt sich:

$${}_{10}V_2 = 0{,}182\,5748 \qquad \underline{182{,}57\ ^0/_{00}}.$$

Nun ist weiter:

$${}_{10}V_1 = 248{,}0258\ ^0/_{00}$$
$$\underline{{}_{10}V_2 = 182{,}5748\ ^0/_{00}}$$
$${}_{10}V = 430{,}6006\ ^0/_{00}$$

fürs Tausend der Todesfallsumme.

Zur Probe!

$$_{10}V = \left(\frac{M_{45} + \frac{1}{2}D_{55}}{D_{45}}\right) - \left(\frac{M_{35} + \frac{1}{2}D_{55}}{N_{35} - N_{55}}\right) \cdot \left(\frac{N_{45} - N_{55}}{D_{45}}\right)$$

$$\left(M_{35} + \frac{1}{2}D_{55}\right) = 15\,391{,}6489$$
$$(N_{35} - N_{55}) = 348\,605{,}83$$
$$\text{Quotient} = 0{,}044\,15201$$
$$\underline{P = 44{,}15201\ ^0/_{00}}$$

In der Tat ist:

$$P_1 = 30{,}16301\ ^0/_{00}$$
$$\underline{P_2 = 13{,}98900\ ^0/_{00}}$$
$$P = 44{,}15201\ ^0/_{00}$$

$$M_{45} = 8\,108{,}2696$$
$$\underline{\tfrac{1}{2}D_{55} = 4\,876{,}6475}$$
$$\text{Summe} = 12\,984{,}9171$$
$$D_{45} = 16\,525{,}11$$
$$\text{Quotient} = 0{,}785\,7689 = h_1$$

$$N_{45} = 248\,898{,}01$$
$$\underline{N_{55} = 115\,966{,}46(3)}$$
$$\text{Diff.} = 132\,931{,}54(7)$$
$$D_{45} = 16\,525{,}11$$
$$\text{Quotient} = 8{,}044\,216 = h_2$$

$$h_1 = 785{,}7689\ ^0/_{00}$$
$$\underline{P \cdot h_2 = 355{,}1683\ ^0/_{00}}$$
$$\text{Diff.} = {}_{10}V = 430{,}6006\ ^0/_{00} \qquad \underline{430{,}60\ ^0/_{00}}\,.$$

Es wäre nicht richtig, wenn man nun aus diesem Betrage von $430{,}60\ ^0/_{00}$ den Rückkaufswert vergüten, also einen Rückkaufspreis von $\underline{344{,}48\ ^0/_{00}}$ festsetzen wollte. Denn man hätte dann für eine Todesfallversicherung mit Wartefrist, die mittelbar in der Versicherung enthalten ist, einen Rückkaufswert zugestanden. Man kann nämlich den Barwert der Versicherung folgendermaßen zerlegen:

$$A_x + \frac{1}{2} \cdot {}_nE_x = \frac{1}{2} \cdot A_x + \frac{1}{2} \cdot A_x + \frac{1}{2} \cdot {}_nE_x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot {}_{|n}A_x + \frac{1}{2} \cdot {}_{n|}A_x + \frac{1}{2} \cdot A_x + \frac{1}{2} \cdot {}_nE_x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot ({}_{|n}A_x + {}_nE_x) + \frac{1}{2} \cdot A_x + \frac{1}{2} \cdot {}_{n|}A_x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot A_{x,\overline{n}|} + \frac{1}{2} \cdot A_x + \frac{1}{2} \cdot {}_{n|}A_x\,.$$

Die in dem gesamten Barwert enthaltene gemischte Versicherung ist rückkaufsfähig, ebenso die lebenslängliche Versicherung, nicht aber die Versicherung mit Wartefrist.

Es ergibt sich also weiter:

$$A_{35,\overline{20}|} = 550,4853\ {}^0/_{00}$$
$$a_{35,\overline{20}|} = 13,29\,279$$
$$P_{35,\overline{20}|} = 41,41\,232\ {}^0/_{00}$$
$$a_{45,\overline{10}|} = 8,044\,216$$
$$A_{45,\overline{10}|} = 727,9733\ {}^0/_{00}$$
$$P \cdot a_{45,\overline{10}|} = 333,1296\ {}^0/_{00}$$
$$\text{Diff.} = {}_{10}V_{35,\overline{20}|} = 394,8437\ {}^0/_{00} \qquad \underline{394,84\ {}^0/_{00}}.$$

Zur Probe!

$$a_{45,\overline{10}|} = 8,044\,216$$
$$a_{35,\overline{20}|} = 13,292\,79$$
$$\text{Quotient} = 0,605\,1563$$
$${}_{10}V_{35,\overline{20}|} = 0,394\,8437 \qquad \underline{394,84\ {}^0/_{00}}.$$

Alsdann ist weiter:

$$\frac{1}{2} \cdot {}_{10}V_{35} = 124,0129\ {}^0/_{00}$$
$$\frac{1}{2} \cdot {}_{10}V_{35,\overline{10}|} = 197,4218\ {}^0/_{00}$$
$$\text{Summe} = 321,4347\ {}^0/_{00} \qquad \underline{321,43\ {}^0/_{00}}.$$

Nur dieser Wert darf für die Bemessung des Rückkaufspreises zugrunde gelegt werden. Er muß sich von dem vorhandenen Deckungskapital unterscheiden um das Deckungskapital der Versicherung mit Wartefrist. In der Tat ist:

$$M_{55} = 5831,7260 \qquad M_{55} = 5831,7260$$
$$(N_{35} - N_{55}) = 348\,605,83 \qquad D_{45} = 16\,525,11$$
$${}^{20|}_{20}P_{35} = 16,728\,71 \qquad {}_{10|}A_{45} = 0,352\,9009$$
$${}_{10|}A_{45} = 352,9009\ {}^0/_{00}$$
$${}^{20|}_{20}P_{35} \cdot a_{45,\overline{10}|} = 134,5694\ {}^0/_{00}$$
$$\text{Diff.} = 218,3315\ {}^0/_{00} = h$$
$$\frac{1}{2}h = \underline{109,1657(5)\ {}^0/_{00}}.$$

$$\begin{array}{lr} \text{gesamte Reserve} & {}_{10}V = 430{,}6006\,{}^0/_{00} \\ \text{Rückkaufsreserve} & RV = 321{,}4347\,{}^0/_{00} \\ \hline \text{Unterschied} & \text{Diff.} = \underline{109{,}1659\,{}^0/_{00}}\,. \end{array}$$

Als Rückkaufswert ergibt sich also der Betrag

$Rw. = 0{,}80 \cdot 321{,}4347\,{}^0/_{00} = 257{,}1478\,{}^0/_{00}.$ $\underline{257{,}15\,{}^0/_{00}\;.}$

Für 15 000 Mk. Versicherungssumme ist mithin ein Betrag von 3857,25 Mk. auszuzahlen.

Bei der Ermittlung der prämienfreien Summe ist besonders acht zu geben.

Wird der Rückkaufswert als Nettoeinlage verwendet, so ist folgendermaßen zu rechnen:

$$\begin{array}{rl} D_{55} = & 9\,753{,}295 \\ D_{45} = & 16\,525{,}11 \\ {}_{10}E_{45} = & 0{,}590\,2106 \\ \frac{1}{2} \cdot {}_{10}E_{45} = & 0{,}295\,1053 \\ A_{45} = & 0{,}490\,6636 \\ \hline \text{Summe} = & 0{,}785\,7689 = h \end{array}$$

$\underline{785{,}77\,{}^0/_{00}\;.}$

Hier wäre es nun wieder falsch, wenn man nur den gewöhnlichen Rückkaufswert als Einlage verwenden wollte. Denn wenn auch die in der Versicherung mittelbar enthaltene Versicherung mit Wartefrist nicht rückkaufsfähig ist, so kann sie anderseits sehr wohl in eine prämienfreie Versicherung umgewandelt werden. Es ist also zu setzen:

$$W^I = \frac{0{,}80 \cdot {}_{10}V}{h} = \frac{344{,}48\,{}^0/_{00}}{0{,}78577}$$

$$\underline{W^I = 438{,}40\,{}^0/_{00}\;.}$$

Das wäre die prämienfreie Todesfallsumme. Es wäre dann also noch eine prämienfreie Lebensfallsumme von $\underline{219{,}20\,{}^0/_{00}}$ festzusetzen. Für die ursprünglichen Summen von 15 000 Mk. und 7500 Mk. ergeben sich also die herabgesetzten Summen von 6576 Mk. und 3288 Mk.

Technisch noch folgerichtiger wäre es, wenn man

jeden Teil der Versicherung getrennt umwandelte. Es ergäbe sich da folgendes:

$$\begin{aligned} 0{,}80 \cdot {}_{10}V_1 &= 198{,}42\,{}^0/_{00} \\ A_{45} &= 0{,}490\,66 \\ \underline{W_1^I} &\underline{= 404{,}40\,{}^0/_{00}}\,, \\ 0{,}80 \cdot \frac{1}{2}\,{}_{01}V_2' &= 146{,}06\,{}^0/_{00} \\ {}_{10}E_{45} &= 0{,}590\,21 \\ \underline{W_2^I} &\underline{= 247{,}50\,{}^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Nach dieser Art der Berechnung erhält man also im vorliegenden Falle eine geringere Todesfallsumme, aber eine höhere Lebensfallsumme. Da jedoch Versicherte, die ihre Versicherung in der Summe herabsetzen lassen, im allgemeinen gute Lebenswagnisse sind, also keine große Sterbenserwartung aufweisen, so ist es durchaus zweckmäßig, das ursprüngliche Verhältnis zwischen Todesfallsumme und Lebensfallsumme beizubehalten.

Keineswegs aber soll man die Lebensfallsumme überhaupt wegfallen lassen. Technisch anfechtbar wäre also die folgende Art der Berechnung:

$$\begin{aligned} {}_{10}V = {}_{10}V_1 + {}_{10}V_2 &= 430{,}60\,{}^0/_{00} \\ 0{,}80 \cdot {}_{10}V_2 &= 344{,}48\,{}^0/_{00} \\ A_{45} &= \quad 0{,}490\,66 \\ W &= 702{,}10\,{}^0/_{00}\,. \end{aligned}$$

Das wäre dann die fernere Todesfallsumme, die festzusetzen wäre, wenn die „Bonifikation" wegfiele. Eine solche Umwandlung könnte auf besonderen Wunsch zwar zugelassen werden, jedoch nur, wenn der Versicherte nachgewiesen hat, daß er völlig gesund ist. Es wäre also meist eine ärztliche Untersuchung erforderlich. Daß eine derartige Umwandlung an sich nicht ohne weiteres statthaft ist, erkennt man leicht, wenn man annimmt, die „Bonifikation" sei der Todesfallsumme gleich. Dann ergäbe sich für den vorliegenden Fall:

$$
\begin{aligned}
{}_{10}V_1 &= 248{,}0258\ {}^0/_{00} \\
{}_{10}V_2 &= 365{,}1496\ {}^0/_{00} \\
\hline
\text{Summe} &= 613{,}1754\ {}^0/_{00} \\
0{,}80 \cdot \text{Summe} &= 490{,}54\ {}^0/_{00} \\
A_{45} &= \quad 0{,}490\,66 \\
W &= 999{,}80\ {}^0/_{00}\,.
\end{aligned}
$$

Die prämienfreie Summe wäre dann ziemlich genau gleich der ursprünglichen Todesfallsumme und würde sie sogar leicht übersteigen können, was selbstverständlich nicht ohne weiteres zulässig ist.

Verwendet man das volle Deckungskapital als Bruttoeinlage, so kann man billigerweise den Aufschlag für die Lebensfallversicherung ermäßigen. Rechnet man mit der Hälfte des sonst üblichen Aufschlages, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
\beta &= 0{,}0030 \\
\beta' &= 0{,}0015 \\
a_{45,\overline{10}|} &= 8{,}044\,216 \\
A_{45} + \beta \cdot a_{45,\overline{10}|} &= 0{,}51480 = h_1 \\
{}_{10}E_{45} + \beta' \cdot a_{45,\overline{10}|} &= 0{,}60228 = h_2\,.
\end{aligned}
$$

Behandelt man beide Teile getrennt, so ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
{}_{10}V_1 &= 248{,}03\ {}^0/_{00} \\
h_1 &= 0{,}514\,80 \\
\underline{W_1^{II}} &\underline{= 481{,}80\ {}^0/_{00}}\,, \\
{}_{10}V_2 &= 182{,}57\ {}^0/_{00} \\
h_2 &= 0{,}602\,28 \\
\underline{W_2^{II}} &\underline{= 303{,}10\ {}^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

Zieht man dagegen die Teile wieder zusammen, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
{}_{10}V = {}_{10}V_1 + {}_{10}V_2 &= 430{,}60\ {}^0/_{00} \\
\left(h_1 + \frac{1}{2} h_2\right) &= 0{,}815\,94 \\
\underline{W^{II}} &\underline{= 527{,}70\ {}^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

Zu dieser Todesfallsumme käme dann noch hinzu eine Lebensfallsumme von $\underline{263{,}85\,^0/_{00}}$. Auch hier ergeben sich wieder recht hohe Werte, was stets der Fall sein wird, wenn bei der Bemessung des Rückkaufwertes noch ein hoher Abzug gemacht wird.

Da in dem hier vorliegenden Beispiel die Prämienzahlungsdauer begrenzt und nicht auf eine lange Dauer erstreckt ist, so ließe sich die prämienfreie Summe schließlich auch berechnen nach dem Verhältnis der Anzahl der tatsächlich eingezahlten Prämien zur Anzahl der bedungenen Prämien. Es ergäbe sich dann:

$$W^{\mathrm{III}} = \frac{10}{20} = 0{,}50\,000 \qquad \underline{500\,^0/_{00}}\,.$$

Sowohl die Todesfallsumme wie auch die Lebensfallsumme wäre dann also auf die Hälfte des ursprünglichen Betrages herabzusetzen.

Aufgabe 87

Auf das Leben eines 27jährigen ist eine Todesfallversicherung von 10 000 Mk. als Versicherung auf Lebenszeit abgeschlossen worden. Die Prämienzahlungsdauer ist begrenzt auf das 85. Lebensjahr. Nach 10 Jahren wird die Versicherung in eine gemischte Versicherung umgewandelt. Als Endalter wird das 50. Lebensjahr festgesetzt. Die Umwandlung wird ohne Nachzahlung durchgeführt. Nach weiteren 3 Jahren soll die Versicherungsdauer jedoch wieder um 15 Jahre verlängert, also bis zum 65. Lebensjahr ausgedehnt werden. Nachdem die Versicherung in der abgeänderten Form wieder 5 Jahre weitergelaufen ist, wird sie schließlich in eine prämienfreie Versicherung umgewandelt, wobei das Deckungskapital als Bruttoeinlage verwendet wird. Die Gesellschaft „zillmert" nur mit $10\,^0/_{00}$. Wie gestaltet sich die Berechnung? [Formeln (131), (136) und (138)].

Für die erste Umwandlung wird in der Praxis gewöhnlich das volle Deckungskapital angerechnet, was eigentlich nicht ganz richtig ist, weil meist nur gute Wagnisse eine solche Umwandlung vornehmen lassen, während die schlechten Lebensrisiken langfristig versichert bleiben. Technisch richtiger wäre es, einen erhöhten Rückkaufswert anzurechnen. Man könnte den Abfindungssatz zum Beispiel bestimmen nach der Formel:

$$\eta' = \eta + \frac{t - m}{n - m} \cdot (1 - \eta),$$

wobei mit η der regelrechte Abfindungssatz, mit n die ursprünglich bedungene Versicherungsdauer (oder Prämienzahlungsdauer), mit t die neu bedungene (gesamte) Versicherungsdauer (oder Prämienzahlungsdauer) und mit m die bereits zurückgelegte Versicherungsdauer bezeichnet wäre. Der erhöhte Rückkaufswert kann dann als Nettoeinlage angesehen werden. Wird vom vollen Deckungskapital ausgegangen, so ist dieses als Bruttoeinlage zu verwenden. Nur wenn schon im voraus bestimmt wird, daß die Umwandlung unbedingt durchgeführt werden soll, dann kann das volle Deckungskapital als Nettoeinlage verwendet werden. Eine solche Bestimmung müßte mindestens einige Jahre (vielleicht mindestens 5 Jahre) vorher getroffen werden.

Im vorliegenden Falle erhält man:

$N_{27} = 721\,153{,}06$	$M_{27} = 12\,732{,}4804$
$N_{85} = \underline{\quad 657{,}20(65)}$	$D_{27} = 37\,119{,}30$
$\text{Diff.} = 720\,495{,}85(35)$	$A_{27} = 0{,}343\,0151$
$D_{27} = 37\,119{,}30$	${}_{58}P_{27} = 0{,}017\,6718(3)$
$a_{27,\overline{58}\rceil} = 19{,}410\,28$	${}_{58}P^{\zeta}_{27} = 0{,}018\,1870(2)$
$a_{37,\overline{48}\rceil} = 17{,}20041$	(aus den Grund-
$A_{37} = 417{,}4169\,‰$	werten zu berechnen!)
$\underline{P^{\zeta} \cdot a_{37,\overline{48}\rceil} = 312{,}8242\,‰}$	
$\text{Diff.} = {}_{10}V^{\zeta} = 104{,}5927\,‰$	$\underline{104{,}59\,‰}$.

Hätte man zunächst das „ungezillmerte“ Deckungskapital berechnet, so hätte man erhalten:

$$\begin{aligned} A_{37} &= 417{,}4169\ {}^0/_{00} \\ P \cdot a_{37,\overline{48}|} &= 303{,}9627\ {}^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {}_{10}V &= 113{,}4542\ {}^0/_{00}. \end{aligned}$$

Hätte man dann nach dem in der Aufgabe 85 besprochenen Verfahren [vgl. Seite 127!] „gezillmert“, so hätte man erhalten:

entweder:

$$\begin{aligned} (1 - V) &= 886{,}5458\ {}^0/_{00} \\ \zeta\,(1 - V) &= 8{,}8655\ {}^0/_{00} \\ V &= 113{,}4542\ {}^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = V^{\zeta} &= 104{,}5887\ {}^0/_{00}, \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} (V - \zeta) &= 103{,}4542\ {}^0/_{00} \\ \zeta \cdot V &= 1{,}1345\ {}^0/_{00} \\ \hline \text{Summe} = V^{\zeta} &= 104{,}5887\ {}^0/_{00}. \end{aligned}$$

Hier hätte das Verfahren also als Näherungsverfahren recht gut Anwendung finden können.

Wäre die Umwandlung nun schon im voraus (als „automatische“ Umwandlung nach dem „Umtauschtarif“) festgesetzt worden, so wäre folgendermaßen zu rechnen:

$$\begin{aligned} {}_{10}V^{\zeta} &= 104{,}59\ {}^0/_{00} \\ A_{37,\overline{13}|} &= 0{,}662\,52 \\ \hline W &= 157{,}87\ {}^0/_{00}. \end{aligned}$$

Für 1000 Mk. Summe kann also ein Betrag von 157,87 Mk. als prämienfreie Summe einer auf das 50. Lebensjahr abgekürzten gemischten Versicherung festgesetzt werden. Prämien sind dann weiterhin nur noch zu zahlen für den Betrag von 842,13 Mk.

Man könnte auch von dem „ungezillmerten“ Dekkungskapital ausgehen, weil man doch für die ungegedeckten Kosten mit den ferneren Prämien Deckung erhält. Doch gäbe man dann zunächst mehr her als vorhanden ist, was besser unterbleibt.

Ist die Umwandlung nicht schon im voraus festgelegt, so ergibt sich folgendes:

entweder:

$$\beta = 0{,}003$$
$$a_{37,\overline{13}|} = 9{,}979\,720$$
$$A_{37,\overline{13}|} + \beta \cdot a_{37,\overline{13}|} = 0{,}692\,46$$
$${}_{10}V^{\zeta} = 104{,}59\,‰$$
$$W = \underline{151{,}04\,‰}\,,$$

oder (zum Beispiel für $\eta = 0{,}75$):

$$n = 58 \qquad (t - m) = 13$$
$$t = 23 \qquad (n - m) = 48$$
$$m = 10 \qquad \text{Quotient} = 0{,}270\,833\ldots = h$$

$$\eta = 0{,}7500$$
$$h\,(1 - \eta) = 0{,}0677$$
$$\text{Summe} = \eta' = 0{,}8177 \qquad \underline{81{,}8\,‰}\,,$$

$$\eta' \cdot {}_{10}V^{\zeta} = 85{,}55\,‰$$
$$A_{37,\overline{13}|} = 0{,}662\,52$$
$$W = \underline{129{,}13\,‰}\,.$$

Es sei statt dessen der Bequemlichkeit halber eine prämienfreie Summe von $\underline{130\,‰}$ festgesetzt worden. Dann ist also die neue Prämie für die gemischte Versicherung nur zu zahlen für eine Summe von 870 ‰. Ist die Versicherung zum Beispiel zu festen Prämien ohne Gewinnanteil abgeschlossen und als Bruttoprämie einfach die mit einem Aufschlag von 10 % versehene Nettoprämie gefordert, so war in den ersten 10 Jahren eine Prämie von $\underline{19{,}50\,‰}$ zu entrichten. Infolge der Umwandlung ändert sich die Prämie dann aber folgendermaßen:

$$A_{37,\overline{13}|} = 662{,}5215\,‰$$
$$a_{37,\overline{13}|} = 9{,}979\,720$$
$$P_{37,\overline{13}|} = 66{,}386\,78\,‰$$
$$\mathfrak{P}_{37,\overline{13}|} = 73{,}025\,46\,‰$$
$$\underline{73{,}-\,‰}\,.$$

In den ersten 10 Jahren war also für 10 000 Mk. Versicherungssumme jährlich ein Betrag von <u>195 Mk.</u> auf-

zuwenden. Nach der Umwandlung ist noch für 8700 Mark eine Prämie von 73 $^0/_{00}$ zu zahlen. Die Jahresprämie erhöht sich also auf 635,10 Mk.

Bisweilen kommt es auch vor, daß eine solche Umwandlung rückwirkend durchgeführt wird, daß die Versicherung dann also zum ursprünglichen Eintrittsalter weiterläuft. Das ist zulässig, wenn das Deckungskapital entsprechend aufgefüllt wird. Für das vorliegende Beispiel ergäbe sich:

$$A_{27,\overline{23}|} = 501{,}4119\ {}^0/_{00} \qquad A_{37,\overline{13}|} = 662{,}5215\ {}^0/_{00}$$
$$a_{27,\overline{23}|} = 14{,}743\,96 \qquad P^{\zeta} \cdot a_{37,\overline{13}|} = 346{,}1586\ {}^0/_{00}$$
$$P_{27,\overline{23}|} = 34{,}007\,95\ {}^0/_{00} \qquad \text{Diff.} = {}_{10}V^{\zeta} = 316{,}3629\ {}^0/_{00}\,.$$
$$P^{\zeta}_{27,\overline{23}|} = 34{,}686\,20\ {}^0/_{00}$$

$$\begin{aligned} {}_{10}V^{\zeta}_{27,\overline{23}|} &= 316{,}3629\ {}^0/_{00} \\ {}_{10}V^{\zeta}_{27} &= 104{,}5927\ {}^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} &= 211{,}7702\ {}^0/_{00} \qquad \underline{211{,}77\ {}^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Außer dem reinen Unterschied der Deckungskapitale gebührt der Gesellschaft noch ein angemessener Zuschlag, eben weil sie das vorhandene Deckungskapital voll anrechnet. Ein einheitlicher Satz dafür läßt sich nicht angeben. Man kann aber folgendermaßen rechnen:

$$\begin{aligned} {}_{10}V^{\zeta}_{27,\overline{23}|} &= 316{,}36 \\ \eta' \cdot {}_{10}V^{\zeta}_{27} &= 85{,}52 \text{ (genauer)} \\ \hline \text{Diff.} &= 230{,}84 \qquad \underline{231\ {}^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Diese Art der Berechnung ergibt im vorliegenden Falle einen Zuschlag von etwa 9 % des Unterschiedes der Deckungskapitale. Oft genügt jedoch ein geringerer Zuschlag. Rechnet man mit einem Durchschnittssatz, so kann ein Zuschlag von 5 % als angemessen bezeichnet werden.

Ist das Deckungskapital aufgefüllt, so ist fernerhin die niedrigere Prämie des ursprünglichen Alters zu zahlen. Es wäre das in dem hier behandelten Beispiel eine

Prämie von 37,50 $^0/_{00}$, also von 375 Mk. für 10000 Mk. Summe.

Statt dessen ist die Versicherung aber ohne Nachzahlung umgewandelt. Nach weiteren 3 Jahren berechnet sich dann das Deckungskapital folgendermaßen:

$$P_{37,\overline{13|}} = 66{,}386\,78\ ^0/_{00}\ .$$

(Die Prämie braucht nicht mehr „gezillmert" zu werden, da bei der ersten Umwandlung die ungedeckten Kosten schon getilgt worden sind.)

$$\begin{aligned} 0{,}87 \cdot P_{37,\overline{13|}} &= 57{,}756\,50\ ^0/_{00} = P' \\ a_{40,\overline{10|}} &= 8{,}148\,052 \\ A_{40,\overline{10|}} &= \quad 724{,}4620\ ^0/_{00} \\ P' \cdot a_{40,\overline{10|}} &= \quad 470{,}6030\ ^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {}_{13}V &= \quad 253{,}8590\ ^0/_{00} \qquad \underline{253{,}86\ ^0/_{00}}\ . \end{aligned}$$

Das Deckungskapital läßt sich auch in zwei Teile zerlegen. Ein Teil davon gilt für die prämienpflichtige, ein anderer für die prämienfreie Versicherung. Es ist:

$$\begin{aligned} A_{40,\overline{10|}} &= 724{,}4620\ ^0/_{00} \\ P \cdot a_{40,\overline{10|}} &= 540{,}9229\ ^0/_{00} \\ \hline \text{Diff.} = {}_{13}V' &= 183{,}5391\ ^0/_{00} \\ 0{,}87 \cdot {}_{13}V' &= 159{,}6790\ ^0/_{00} \end{aligned}$$

für den prämienpflichtigen Teil,

$$0{,}13 \cdot A_{40,\overline{10|}} = \quad 94{,}1800\ ^0/_{00}$$

für den prämienfreien Teil,

zusammen $\underline{253{,}8590\ ^0/_{00}}$.

Soll die Versicherungsdauer nun wieder verlängert werden, so muß zunächst nachgewiesen werden, daß der Versicherte sich einer guten Gesundheit erfreut. Es wird also im allgemeinen eine neue ärztliche Untersuchung notwendig sein. Fällt die Untersuchung günstig aus, so kann folgendermaßen gerechnet werden:

$$\begin{aligned} {}_{13}V &= 253{,}86\ ^0/_{00} \\ A_{40,\overline{25|}} &= 0{,}511\,21 \\ W &= 496{,}58\ ^0/_{00} \qquad \underline{500\ ^0/_{00}}\ . \end{aligned}$$

Mit der üblichen Abrundung könnte man also bestimmen, daß die Hälfte der Versicherungssumme fernerhin prämienfrei sein solle. Die Prämie der neuen Form wäre dann im vorliegenden Falle nur noch für 5000 Mk. zu entrichten; sie wäre folgendermaßen zu berechnen:

$$A_{40,\overline{25}|} = 511{,}2135\ {}^0/_{00}$$
$$a_{40,\overline{25}|} = 14{,}454\,11$$
$$P_{40,\overline{25}|} = 35{,}368\,04\ {}^0/_{00}$$
$$\mathfrak{P}_{40,\overline{25}|} = 38{,}904\,84\ {}^0/_{00} \qquad \underline{39,\!-\ {}^0/_{00}}\,.$$

Es wäre also fernerhin eine Prämie von 195 Mk. zu entrichten. Das wäre [zufällig] dieselbe Prämie, die anfangs gezahlt worden ist.

Die Umwandlung könnte auch in der Weise durchgeführt werden, daß fernerhin die Prämie des ursprünglichen Alters entrichtet wird. Die Berechnung gestaltete sich dann folgendermaßen:

$$A_{27,\overline{38}|} = 381{,}1549\ {}^0/_{00}$$
$$a_{27,\overline{38}|} = 18{,}300\,13$$
$$P_{27,\overline{38}|} = 20{,}827\,99\ {}^0/_{00}$$
$$\mathfrak{P}_{27,\overline{38}|} = 22{,}910\,79\ {}^0/_{00} \qquad \underline{23,\!-\ {}^0/_{00}}\,.$$

In diesem Falle wäre also fernerhin eine Jahresprämie von 230 Mk. zu entrichten. Dabei wäre der volle Betrag der Versicherungssumme „prämienpflichtig“. Der prämienfreie Teil, die sogenannte „Gutrechnung“, fiele also weg. Aus dem vorhandenen Deckungskapital wird dann aber ein bestimmter Teil frei. Denn es ist:

$$A_{40,\overline{25}|} = 511{,}2135\ {}^0/_{00}$$
$$P_{27,\overline{38}|} \cdot a_{40,\overline{25}|} = 301{,}0501\ {}^0/_{00}$$
$$\text{Diff.} = {}_{13}V_{27,\overline{38}|} = 210{,}1634\ {}^0/_{00} \qquad \underline{210{,}16\ {}^0/_{00}}\,.$$

vorhandenes Deckungskapital	253,86 $^0/_{00}$
erforderliches Deckungskapital	210,16 $^0/_{00}$
überschüssiges Deckungskapital	43,70 $^0/_{00}$.

Es fällt also aus ein Deckungskapital von 437 Mk. Wenngleich dieses Deckungskapital eigentlich voll er-

stattet werden könnte, empfiehlt es sich doch aus wirtschaftlichen Gründen, auch hier einen Abzug zu machen. Man könnte zum Beispiel bestimmen, daß von dem vorhandenen Deckungskapital nur 95 % angerechnet werden sollen. Dann hat man:

95 % des vorhandenen Deckungskapitals	241,16 ‰
erforderliches Deckungskapital	210,16 ‰
dem Versicherten zu erstattender Betrag	31,— ‰ .

Es wäre ein Betrag von 310 Mk. zurückzuzahlen. Das wären etwa 71 % des frei werdenden Betrages. Der Abzug kann aber auch niedriger bemessen werden.

Hat der Versicherte die Versicherung nun zur Prämie von 195 Mk., also „mit Gutrechnung" nochmals 5 Jahre weiter geführt, so ist das Deckungskapital alsdann folgendermaßen zu berechnen:

$$\begin{aligned} P_{40,\overline{25}|} &= 35{,}368\,04\ ‰ \\ 0{,}5 \cdot P_{40,\overline{25}|} &= 17{,}684\,02\ ‰ = \dot{P}' \\ a_{45,\overline{20}|} &= 12{,}528\,40 \\ P' \cdot a_{45,\overline{20}|} &= 221{,}5525\ ‰ \\ A_{45,\overline{20}|} &= 576{,}3342\ ‰ \\ \text{Diff.} = {}_{18}V &= 354{,}7817\ ‰ \qquad \underline{354{,}78\ ‰}\ . \end{aligned}$$

Rechnet man für beide Teile getrennt, so erhält man:

$$\begin{aligned} P_{40,\overline{25}|} &= 35{,}368\,04\ ‰ \\ P_{40,\overline{25}|} \cdot a_{45,\overline{20}|} &= 443{,}1050\ ‰ \\ A_{45,\overline{20}|} &= 576{,}3342\ ‰ \\ \text{Diff.} &= 133{,}2292\ ‰ = h \\ \frac{1}{2} \cdot h = {}_{18}V_1 &= 66{,}6146\ ‰ \\ \frac{1}{2} \cdot A_{45,\overline{20}|} = {}_{18}V_2 &= 288{,}1671\ ‰ \\ \text{zusammen}\ & \ 354{,}7817\ ‰ \qquad \underline{354{,}78\ ‰}\ . \end{aligned}$$

Im ganzen sind also 3547,80 Mk. an Deckungskapital vorhanden. Davon treffen 666,10 Mk. auf den prämienpflichtigen, 2881,70 Mk. auf den prämienfreien Teil der Versicherungssumme.

Soll die Versicherung nun vollständig prämienfrei werden, so ist zunächst:

$$A_{45,\overline{20}|} + \beta \cdot a_{45,\overline{20}|} = 0{,}613\,92\;,$$

wenn wieder $\beta = 0{,}003$ gesetzt wird.

Es wäre aber falsch, wenn man nun rechnen wollte:

$$W = \frac{354{,}78\,^0/_{00}}{0{,}613\,92} = 577{,}89\,^0/_{00}\,.$$

Denn dann hätte man ja den Teil der Versicherung, der ohnehin schon prämienfrei ist, aufs neue mit einem Verwaltungskostenzuschlag belastet, was natürlich nicht gerecht wäre. Man hat vielmehr nur den „prämienpflichtigen" Teil der Versicherung umzuwandeln. Es ergibt sich also:

$$W' = \frac{{}_{18}V_1}{A + \beta \cdot a} = \frac{66{,}61\,^0/_{00}}{0{,}613\,92} = 108{,}50\,^0/_{00}\,,$$

$$\underline{100{,}-\,^0/_{00}\,.}$$

Zu der schon vorhandenen prämienfreien Summe von $\underline{500\,^0/_{00}}$ kommt noch eine Zusatzsumme von $\underline{100\,^0/_{00}}$ hinzu. Im ganzen sind dann also <u>6000 Mk.</u> prämienfrei. Will man aus dem infolge der Abrundung der prämienfreien Summe nicht verwendeten Deckungskapital eine Abfindungssumme erstatten, so rechnet man folgendermaßen:

Für 1000 Mk. prämienfreie Summe sind 613,92 Mk. Deckungskapital erforderlich. 666,10 Mk. sind vorhanden. Also bleiben 52,18 Mk. übrig. Daraus kann die Rückvergütung gewährt werden.

A n m e r k u n g. Es ist hier eine Versicherung ohne Gewinnbeteiligung besprochen worden. Ist die Versicherung am Gewinn beteiligt, so ist meist neben dem Deckungskapital noch die Gewinnrücklage zu berücksichtigen. Grundsätzlich bleibt die Berechnung aber dieselbe. Ferner wäre bei strenger Rechnung eigentlich noch eine „Unkostenreserve" zu berücksichtigen, was für die Praxis aber unbequem wäre und deshalb meist

unterbleibt. Man versteht unter einer Unkostenreserve den Betrag, den man zur Deckung von später fällig werdenden Verwaltungskostenbeiträgen schon einmalig aus den vorhandenen Deckungsmitteln herausgenommen hat, von dem man also eigentlich Jahr für Jahr etwas zurückstellen müßte. Ist zum Beispiel einmalig der Betrag $\beta \cdot a_{x,\overline{n}|}$ eingezogen, so müßte davon nach m Jahren noch der Betrag $U = \beta \cdot a_{x+m,\, \overline{n-m}|}$ als Unkostenreserve zurückgestellt werden.

Aufgabe 88

In dem Beispiel der Aufgabe 87 verlangt der Versicherungsnehmer am Schlusse des 10. Versicherungsjahres, die Versicherung solle in der Weise abgeändert werden, daß die Versicherungssumme spätestens schon nach weiteren 3 Jahren auszuzahlen sei; nötigenfalls könne die Versicherung zu diesem Zweck ja in eine prämienfreie umgewandelt werden. Wie ist dieser Fall zu erledigen?

Es liegt hier ein sogenannter „verkappter Rückkauf" vor. Der Versicherungsnehmer will die Versicherung auflösen. Er weiß aber, oder er vermutet wenigstens, daß das für ihn mit einem wirtschaftlichen Nachteil verbunden sein könnte. Diesen glaubt er umgehen zu können, indem er sich den Anschein gibt, als wolle er die Versicherung nicht auflösen, sondern in eine andere Form umwandeln lassen.

Es läßt sich nicht ohne weiteres angeben, bei welcher Festsetzung der ferneren Versicherungsdauer der verkappte Rückkauf aufhört und die eigentliche Umwandlung beginnt. Eine Dauer von 10 Jahren wäre wohl etwas reichlich bemessen. Eine fernere Dauer von 5 Jahren aber kann man für die regelrechte Umwandlung unbedenklich vorschreiben.

Pflegt man also in der Praxis bei einer Umwandlung das volle Deckungskapital anzurechnen, dann muß man

für einige Jahre, also zum Beispiel für 5 Jahre eine Einschränkung vornehmen. Man kann dann aber etwa bestimmen, daß für eine fernere Versicherungsdauer von weniger als 5 Jahren statt des vollen Deckungskapitals nur der Teil

$$V' = \left[\eta + \frac{t'}{5}(1-\eta)\right] V$$

anzurechnen sei, wobei mit t' die fernere Versicherungsdauer und mit η der regelrechte Rückkaufssatz bezeichnet ist.

Wendet man jedoch die in der Aufgabe 87 angegebene Formel an, so erhält man für jede Umwandlung als anzurechnenden Betrag ohne weiteres den Wert

$$V' = \left[\eta + \left(\frac{t-m}{n-m}\right)(1-\eta)\right] \cdot V, \; (t \leqq n),$$

den man dann als Nettoeinlage verwenden kann.

Damit ist dann eine zu günstige Behandlung des verkappten Rückkaufs ohnehin ausgeschlossen.

Im vorliegenden Fall ergibt sich, wenn wieder $\eta = 0{,}75$ sein soll:

$$t' = 3$$

I. $$\eta + \frac{t'}{5}[1-\eta] = 0{,}90 \qquad \underline{90\,\%}$$

$$\begin{aligned} V &= 104{,}59\,^0/_{00} \\ V' &= 94{,}13\,^0/_{00} \\ \beta &= 0{,}03 \\ A_{37,\overline{3}|} &= 0{,}902\,9641 \\ a_{37,\overline{3}|} &= 2{,}869\,489 \\ A + \beta \cdot a &= 0{,}911\,57 \end{aligned}$$

$$W = \frac{94{,}13\,^0/_{00}}{0{,}911\,57} = \underline{103{,}26\,^0/_{00}}.$$

Es ist technisch durchaus nichts dagegen einzuwenden, wenn in derartigen Fällen die prämienfreie Summe sogar hinter dem vorhandenen vollen Deckungskapital zurückbleibt. Darin ist ja rein äußerlich schon gekennzeichnet, daß ein verkappter Rückkauf vorliegt.

Weiter ist:

II.

$$t = 8 \qquad (t - m) = 3$$

$$n = 58 \qquad (n - m) = 53$$

$$\left[\eta + \left(\frac{t - m}{n - m}\right)(1 - \eta)\right] = 0{,}764(15) \qquad \underline{76{,}4\,\%}$$

$$V' = 79{,}91\,^0/_{00}$$

$$W = \frac{79{,}91\,^0/_{00}}{0{,}902\,96} = \underline{88{,}50\,^0/_{00}}\,.$$

Hier ist die prämienfreie Summe sogar noch erheblich geringer als das vorhandene Deckungskapital. Man wird also dem Versicherungsnehmer entschieden dazu raten, auf eine derartige Umwandlung zu verzichten, schon allein deshalb, weil er sonst in den folgenden 3 Jahren unerträglich hohe Prämien zu zahlen hätte. Wollte man ihm selbst die höhere prämienfreie Summe von $100\,^0/_{00}$, also von 1000 Mk. als Gutrechnung zugestehen — der kleine Unterschied der Summe wird am besten ausgeglichen, indem $75\,^0/_0$ von (941,30 Mk.—911,57 Mk.), also 22,30 Mk. bar vergütet werden —, so hätte er 3mal eine Jahresprämie von <u>2947,50 Mk.</u> zu zahlen. Denn es wäre dann:

$$A_{37,\overline{3}|} = 902{,}9641\,^0/_{00}$$

$$a_{37,\overline{3}|} = \quad 2{,}869\,489$$

$$P_{37,\overline{3}|} = 314{,}6777\,^0/_{00}$$

$$\mathfrak{P}_{37,\overline{3}|} = \frac{A_{37,\overline{3}|} + \beta \cdot a_{37,\overline{3}|}}{0{,}97 \cdot a_{37,\overline{3}|}} = 327{,}5028\,^0/_{00}$$

$$\underline{327{,}50\,^0/_{00}\,.}$$

Dabei ist die Bruttoprämie sogar abweichend von der sonstigen Form der Berechnung, die allerdings bei so kurzer Dauer nicht gut hätte angewendet werden können, nach einer anderen Art der Zuschlagbemessung ermittelt. Das Unwirtschaftliche einer solchen Umwandlung spiegelte sich übrigens schon in der Gesamtleistung von 10 792,50 Mk. wieder.

Anmerkung: Wenn gegenwärtig in der deutschen Lebensversicherung die Rückkaufswerte nach anderen Grundsätzen berechnet werden als früher, so bleibt das auf den Lehrwert der im vorstehenden gegebenen Beispiele ohne jeden Einfluß, um so mehr, als es leicht möglich ist, daß die deutschen Lebensversicherungsanstalten mit dem jetzigen Verfahren der Bemessung von Abfindungswerten auf die Dauer schlechte Erfahrungen machen werden.

Übrigens bedeutet mittelbar ja jedes Verfahren des Abzuges irgendwie eine Berechnung mit Hilfe des Ausdruckes $\eta \cdot V$, nur daß dann η stark veränderlich sein kann. Bestimmt man, daß als Rückkaufswert einfach ein entsprechend stärker „gezillmertes" Deckungskapital gelten solle, so ist

$$Z = (\zeta_2 - \zeta_1) \cdot \frac{a_m}{a}$$

der Abzug am Deckungskapital. Es ist dabei mit ζ_1 der regelrechte Zillmersatz, mit ζ_2 der für die Berechnung des Rückkaufswertes geltende Zillmersatz bezeichnet. Der Abzug Z muß selbstverständlich einen bestimmten Teil η vom rechnungsmäßigen Deckungskapital ausmachen.

Es lohnt sich, einen Vergleich zu ziehen.

Eine deutsche Versicherungsanstalt habe früher die Rückkaufssätze folgendermaßen berechnet: 70 $^0/_0$ des mit 12 $^1/_2$ $^0/_{00}$ „gezillmerten" Deckungskapitals, solange dieses nicht mehr als 40% der Versicherungssumme ausmacht, dann je $^1/_2$ $^0/_0$ Steigerung für je 1 $^0/_0$, um das das Deckungskapital höher ausfällt. Jetzt rechne die Anstalt mit einem Zillmersatz von 25 $^0/_{00}$, gebe als Rückkaufswert aber einfach das mit 35 $^0/_{00}$ „gezillmerte" Deckungskapital.

Wie sieht dann beispielsweise für eine auf das 60. Lebensjahr abgekürzte gemischte Versicherung des 30-

jährigen der Unterschied aus? Man vergleiche für zurückgelegte Versicherungsdauern von 3 zu 3 Jahren!

Zurückgelegte Dauer	mit 12½‰ gezillmertes Deckungskapital	Abfindungssatz	Rückkaufswert	mit 25‰ gezillmertes Deckungskapital	mit 35‰ gezillmertes Deckungskapital
3 Jahre	46,19‰	70%	32,33‰	34,41‰	24,99‰
6 „	111,09 „	70%	77,76 „	100,12 „	91,34 „
9 „	182,82 „	70%	127,97 „	172,73 „	164,66 „
12 „	262,03 „	70%	183,42 „	252,92 „	245,63 „
15 „	349,74 „	70%	244,82 „	341,71 „	335,29 „
18 „	447,99 „	72%	322,55 „	441,17 „	435,72 „
21 „	558,58 „	77½%	432,90 „	553,13 „	548,77 „
24 „	683,71 „	84%	574,32 „	679,81 „	676,68 „
27 „	828,19 „	91%	753,65 „	826,07 „	824,37 „
30 „	1000,— „,	100%,	1000,— „,	1000,— „,	1000,— „.

Nur ganz zu Anfang ergibt das jetzige Verfahren einen höheren Abzug als das frühere Verfahren; im großen und ganzen aber ist es umgekehrt; und wenn auch die Rückkaufssysteme der Vergangenheit nicht gerade als Muster versicherungstechnischer Regelung haben gelten können, so ist es doch anderseits gewiß nicht unbedenklich, wenn man den Abzug am Deckungskapital jetzt so niedrig hält. Das mag für die Werbung vorteilhaft sein, versicherungstechnisch aber ist es unvorteilhaft, da von einem angemessenen Ausgleich (vgl. Seite 133 und 134 des Lehrbuchs!) nicht mehr gut die Rede sein kann. Das jetzige Verfahren dürfte nicht einmal immer genügend Deckung bieten für die von der Anstalt tatsächlich aufgewendeten Erwerbskosten; diese sind im allgemeinen höher als die rechnungsmäßig angesetzten einmaligen Unkosten.

Es ist unter diesen Umständen sehr wohl möglich, daß man zu dem in der Vergangenheit erprobten Verfahren in absehbarer Zeit zurückkehren wird, wenn man diesem Verfahren dann wohl auch eine andere, versicherungstechnisch richtigere Form geben wird.

Aufgabe 89

Ein 32jähriger Vater schließt für sein 2jähriges Töchterchen eine Sparversicherung als Ausstattungsversicherung ab. Das versicherte Kapital von 10 000 Mk. soll nach 18 Jahren fällig werden. Damit aber im Falle seines Ablebens keine weiteren Prämien entrichtet zu werden brauchen, schließt er zur einmaligen Prämie die „Prämienfreiheit im Todesfalle" ein, sodaß die Versicherung als eine Todesfallversicherung mit festem Auszahlungstermin anzusehen ist. Die Gesellschaft rechnet für die Versicherung auf festen Termin mit einem Aufschlag von 20 ‰ für Abschlußkosten und einem Zuschlag von 10 % der erhöhten Nettoprämie; für die Sparversicherung werden diese Zuschläge auf die Hälfte ermäßigt. Welche laufende Prämie und welche einmalige Zusatzprämie ist zu fordern? Welcher Betrag kann nach 10 Jahren als Rückkaufspreis ausgezahlt werden, wenn ein Betrag von 80 % des Deckungskapitals erstattet werden soll? [Formeln (21) und (121$\underline{^a}$)].

Anmerkung: Der Abschluß der Zusatzversicherung ist im allgemeinen abhängig zu machen von dem Ausfall einer vertrauensärztlichen Untersuchung. Zum mindesten muß anderweitig nachgewiesen werden, daß der Versorger ein gutes Wagnis ist.

Zunächst berechnet man die Jahresprämie der beiden Versicherungsformen. Es ergibt sich

für die Versicherung auf festen Termin:	für die Sparversicherung:
$v^{18} = 0{,}538\,361$	$v^{18} = 0{,}538\,361$
$a_{32,\overline{18}\rceil} = 12{,}590\,42$	$a_{\overline{18}\rceil} = 13{,}651\,32$
$v^{18} + 20\,‰ = 558{,}361\,‰$	$v^{18} + 10\,‰ = 548{,}361\,‰$
$P^z_{32,\overline{18}\rceil} = 44{,}3481\,‰$	$P^z_{\overline{18}\rceil} = 40{,}1691\,‰$
$\mathfrak{p}_{32,\overline{18}\rceil} = 48{,}7829\,‰$	$\mathfrak{p}_{\overline{18}\rceil} = 42{,}1776\,‰$
$\underline{48{,}80\,‰}$,	$\underline{42{,}20\,‰}$.

Der Versorger hat eine Jahresprämie von 422 Mk. zu zahlen. Um die einmalige Zusatzprämie zu bestimmen, kann man zwei Wege einschlagen.

I. Man nimmt an, es sei eine Versicherung auf festen Termin abgeschlossen, für die aber nur eine laufende Prämie von 422 Mk. gezahlt werde. Dann ist dafür nur ein Teil der Versicherungssumme versichert, nämlich der Teil

$$s = \frac{\mathfrak{p}_{\overline{n}|}}{\mathfrak{p}_{x,\overline{n}|}} \cdot S\,,$$

wobei mit S die volle Summe bezeichnet ist. Man erhält:

$$\frac{\mathfrak{p}_{\overline{n}|}}{\mathfrak{p}_{x,\overline{n}|}} = \frac{42{,}1776}{48{,}7829} = 0{,}864\,60.$$

Für die Prämie von 422 Mk. kann also nur ein Kapital von 8646 Mk. versichert werden. Demzufolge ist die einmalige Prämie noch zu zahlen für ein Kapital von 1354 Mk. Man berechnet die einmalige Prämie, wenn kein besonderer Tarif vorliegt, am besten nach der Formel:

$$\mathfrak{A} = (1 - \gamma)\,\mathfrak{p} \cdot \mathrm{a}\,,$$

das heißt: man mindert die laufende Prämie um den Satz der Inkassoprovision und bildet dann die einmalige Prämie mit Hilfe des Rentenbarwertes. Im vorliegenden Falle ergibt sich, wenn zum Beispiel $\gamma = 0{,}03$ ist:

$$\mathfrak{p} = 48{,}80\ {}^0/_{00} \quad \text{[Vorsicht! Nicht: } 42{,}20\ {}^0/_{00}\text{]}$$
$$(1 - \gamma)\,\mathfrak{p} = 47{,}336\ {}^0/_{00}$$
$$\mathrm{a} = 12{,}590\,42$$
$$\mathfrak{A} = 595{,}98\ {}^0/_{00}$$
$$\underline{596\ {}^0/_{00}}\,.$$

Zur Probe! Rechnete man nach der Formel

$$\mathfrak{A} = \mathrm{A} + \alpha + \beta \cdot \mathrm{a}\,,$$

so wäre $\beta = 0{,}003$ zu setzen, was durchaus angemessen wäre. Es ergäbe sich dann:

$$\begin{aligned} A &= 538{,}361\ {}^0/_{00} \\ A + \alpha &= 558{,}361\ {}^0/_{00} \\ \beta \cdot a &= \ \ 37{,}771\ {}^0/_{00} \\ \hline \mathfrak{A} &= 596{,}132\ {}^0/_{00}\,. \end{aligned}$$

Die einmalige Prämie von $596\ {}^0/_{00}$ ist zu zahlen für die Restsumme von 1354 Mk. Es ist also eine Zusatzprämie von 807 Mk. einzuzahlen. Die Versicherung läuft dann als Versicherung auf festen Termin.

II. Man nimmt an, die Versicherung laufe als Sparversicherung, sei aber ergänzt durch eine Risikozusatzversicherung. Es muß dann für den Fall des Ablebens eine Rente versichert werden, die so hoch ist wie die Prämie, die dann erlassen werden soll. Es ist das eine Rente im Betrage von $\mathfrak{p}_{\overline{n}|}$. Den Barwert einer solchen Zusatzversicherung bestimmt man wie in der „Familienversorgungsversicherung" [vgl. Seite 75 des Lehrbuchs!]. Es ist also

$$Z\mathfrak{A} = [a_{\overline{n}|} - a_{x,\overline{n}|}] \cdot \mathfrak{p}_{\overline{n}|}\,.$$

Da es sich hier um eine Risikoversicherung mit sehr niedriger Einlage handelt, darf der Zuschlag nicht zu gering bemessen werden. Am besten rechnet man

$$\mathfrak{Z}\mathfrak{A} = Z\mathfrak{A} + \alpha + \beta \cdot a_{x,\overline{n}|}\,,$$

wobei man für α und β angemessene Werte einzusetzen hat. Der Wert $\alpha = 0{,}010$ dürfte sinngemäß sein. Für β findet man einen angemessenen Wert nicht so leicht. Ist in der Versicherung mit festem Termin $\beta = 0{,}003$, so kann man hier vielleicht $\beta = 0{,}0015$ setzen. Dann wäre:

$$\begin{aligned} a_{\overline{18}|} &= 13{,}651\,32 \\ a_{32,\overline{18}|} &= 12{,}590\,42 \\ \hline \text{Diff.} &= \ \ 1{,}060\,90 \\ \mathfrak{p}_{\overline{18}|} &= 42{,}20\ {}^0/_{00} \\ Z\mathfrak{A} &= 44{,}7700\ {}^0/_{00} \\ \alpha &= 10{,}0000\ {}^0/_{00} \\ \beta \cdot a_{32,\overline{18}|} &= 18{,}8856\ {}^0/_{00} \\ \hline \mathfrak{Z}\mathfrak{A} &= 73{,}6556\ {}^0/_{00} \qquad \underline{73{,}70\ {}^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Es wäre eine einmalige Zusatzprämie von <u>737 Mk.</u> einzuzahlen. Die Ergebnisse stimmen mithin, wenn die Aufschläge sinngemäß bemessen werden, wenigstens in der Größenordnung überein.

Den beiden Wegen der Prämienberechnung entsprechend, läßt sich auch das Deckungskapital und der Rückkaufspreis verschieden berechnen.

I.
$$
\begin{aligned}
{}_{10}V &= v^8 - P' \cdot a_{42,\overline{8}|} \\
P' &= 0{,}8646 \cdot P \\
v^{18} &= 538{,}361\ ^0/_{00} \\
a_{32,\overline{18}|} &= 12{,}590\,42 \\
P &= 42{,}7596\ ^0/_{00} \\
P' &= 36{,}9699\,(5)\ ^0/_{00} \\
a_{42,\overline{8}|} &= 6{,}796\,809 \\
v^8 &= 759{,}412\ ^0/_{00} \\
P' \cdot a_{42,\overline{8}|} &= 251{,}278\ ^0/_{00} \\
\hline
{}_{10}V &= 508{,}134\ ^0/_{00} \\
0{,}80 \cdot {}_{10}V &= Rw = \underline{406{,}50\ ^0/_{00}}\,.
\end{aligned}
$$

Der Rückkaufspreis beläuft sich auf <u>4065 Mk.</u> für 10 000 Mk. Versicherungssumme.

II.
$$
{}_{10}V = P_{\overline{18}|} \cdot r_{\overline{10}|} + [a_{\overline{8}|} - a_{42,\overline{8}|}] \cdot p_{\overline{18}|}
$$
$$
\begin{aligned}
v^{18} &= 538{,}361\ ^0/_{00} \\
a_{\overline{18}|} &= 13{,}651\,32 \\
P_{\overline{18}|} &= 39{,}4365\,(5) \\
r_{\overline{10}|} &= 12{,}141\,992 \\
P_{\overline{18}|} \cdot r_{\overline{10}|} &= 478{,}838\,(3)\ ^0/_{00} = h_1
\end{aligned}
$$

Zur Probe!
$$
\begin{aligned}
h_1 &= v^8 - P_{\overline{18}|} \cdot a_{\overline{8}|} \\
a_{\overline{8}|} &= 7{,}114\,544 \\
v^8 &= 759{,}412\ ^0/_{00} \\
P_{\overline{18}|} \cdot a_{\overline{8}|} &= 280{,}573\ ^0/_{00} \\
\hline
\text{Diff.} &= 478{,}839\ ^0/_{00}\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{8}|} &= 7{,}114\,544 \\
a_{42,\overline{8}|} &= 6{,}796\,809 \\
\hline
\text{Diff.} &= 0{,}317\,735 = h_2
\end{aligned}
$$

$$\mathfrak{p}_{\overline{18|}} = 42{,}20\ ^0/_{00}$$
$$h_2 \cdot \mathfrak{p}_{\overline{18|}} = 13{,}408(4)\ ^0/_{00}$$
$$\underline{h_1 = 478{,}838(3)\ ^0/_{00}}$$
$${}_{10}V = 492{,}247\ ^0/_{00}$$
$$0{,}80 \cdot {}_{10}V = Rw = \underline{393{,}80\ ^0/_{00}}.$$

Hier ergibt sich nur ein Rückkaufswert von 3938 Mk. für 10 000 Mk. Versicherungssumme. Es war aber auch eine niedrigere einmalige Zusatzprämie eingezahlt worden.

Der Unterschied der beiden Deckungskapitale verschwindet, sobald man netto rechnet, also die Unkostenaufschläge nicht berücksichtigt. Selbstverständlich ergeben sich dann auch nach beiden Rechnungsarten dieselben Zusatzeinlagen.

I.

$$P_{\overline{18|}} = 39{,}4366$$
$$P_{32,\overline{18|}} = 42{,}7596$$
$$\frac{P_{\overline{18|}}}{P_{32,\overline{18|}}} = 0{,}922\,286 = h$$
$$(1 - h) = 0{,}077\,714$$
$$A = v^{18} = 0{,}538\,361$$
$$ZA = (1 - h)\, v^{18} = 41{,}838(2)\ ^0/_{00} \qquad \underline{41{,}84\ ^0/_{00}},$$

$$P' = h \cdot P_{32,\overline{18|}} = P_{\overline{18|}} = 39{,}4366\ ^0/_{00}$$
$$v^8 = 759{,}412\ ^0/_{00}$$
$$\underline{P' \cdot a_{42,\overline{8|}} = 268{,}043\ ^0/_{00}}$$
$$\text{Diff.} = {}_{10}V = 491{,}369\ ^0/_{00} \qquad \underline{491{,}37\ ^0/_{00}}.$$

II.

$$a_{\overline{18|}} = 13{,}651\,32$$
$$\underline{a_{32,\overline{18|}} = 12{,}590\,42}$$
$$\text{Diff.} = 1{,}060\,90 = h_1$$
$$P_{\overline{18|}} = 39{,}4366\ ^0/_{00}$$
$$h_1 \cdot P_{\overline{18|}} = ZA = 41{,}838(3)\ ^0/_{00} \qquad \underline{41{,}84\ ^0/_{00}},$$

$$
\begin{aligned}
P_{\overline{18}|} \cdot r_{\overline{10}|} &= 478{,}838(3)\ {}^0/_{00} = h_2 \\
a_{\overline{8}|} &= 7{,}114\,544 \\
a_{42,\overline{8}|} &= 6{,}796\,809 \\
\hline
\text{Diff.} &= 0{,}317\,735 = h_3 \\
h_3 \cdot P_{\overline{18}|} &= 12{,}530(4) \\
h_2 &= 478{,}838(3) \\
\hline
\text{Summe} = {}_{10}V &= 491{,}368(7) \qquad \underline{491{,}37\ {}^0/_{00}}.
\end{aligned}
$$

In der Praxis kann sowohl die eine wie auch die andere Form der Berechnung gewählt werden. Zu beachten ist im allgemeinen die Verschiedenheit in der Bemessung der Abschlußprovision. Da es sich übrigens doch um eine Todesfallversicherung handelt, wird der ersten Art der Berechnung insofern der Vorzug gegeben werden können, als die Form sich dann dem Bestand besser einpassen läßt. Wählte man die zweite Form, so hätte man im Bestand eine Lebensfallversicherung mit Todesfallwagnis zu führen, was besser vermieden wird.

Aufgabe 90

Auf das Leben eines 12jährigen Mädchens soll eine Jahresrente von 600 Mk. versichert werden. Die erste Rente soll im Erlebensfalle nach 28 Jahren fällig werden. Während der Aufschubsfrist sollen jährliche Prämien entrichtet werden. Wenn die Versicherte während der Aufschubsfrist stirbt, dann sollen die eingezahlten Prämien ohne Zinsen mit einem Abzug von 3% des Gesamtbetrages zurückgegeben werden. Die Gesellschaft rechnet wegen der Unzulänglichkeit der Grundlagen sowohl für die Grundversicherung wie auch für die Zusatzversicherung insgesamt mit einem Aufschlag von 25% des Nettowertes. Wie kann die Berechnung durchgeführt werden? Welche Prämien sind festzusetzen, wenn beim Ableben nur ein Viertel, die Hälfte oder

drei Viertel der Einlagen erstattet werden sollen? [Formeln (144) und (149)].

Die Sterblichkeitstafel beginnt erst mit dem Eintrittsalter von 17 Jahren. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten der ersten Jahre verlaufen unregelmäßig. Es ist also nicht gut möglich, die vorhergehenden Werte künstlich zu bilden [zu extrapolieren]. Man kann sich da aber in der Praxis sehr leicht helfen, indem man die Sterblichkeit der ersten Jahre [hier der Jahre 12 bis 16] ganz vernachlässigt und zum Ausgleich für diese Jahre mit einem abgeänderten Zinssatz rechnet, nämlich mit einem verringerten Satz für die Todesfallversicherung und mit einem erhöhten Satz für die Lebensfallversicherung. Der Satz ist natürlich willkürlich zu bestimmen. Ist der rechnungsmäßige Zinssatz $3\frac{1}{2}$%, so kann man zum Beispiel für die Todesfallversicherung der ersten Jahre mit einem Satz von 3%, für die Lebensfallversicherung mit einem Satz von 4% rechnen. Das Ergebnis ist dann praktisch genau genug. Für das vorliegende Beispiel gestaltet sich die Berechnung folgendermaßen:

$$
\begin{aligned}
N_{17} &= 1\,195\,728{,}59 \\
N_{40} &= 344\,428{,}30 \\
\hline
\text{Diff.} &= 851\,300{,}29 \\
D_{17} &= 57\,273{,}31 \\
\text{Quotient} &= 14{,}863\,82 = a_{17,\overline{23}|} \\
i &= 0{,}04 \\
v^5 &= 0{,}821\,927
\end{aligned}
$$

Weiter ist:

$$
\begin{aligned}
N_{40} &= 344\,428{,}30 \\
D_{17} &= 57\,273{,}31 \\
{}_{23|}a_{17} &= 6{,}013\,766 \\
v^5 &= 0{,}821\,927 \\
v^5 \cdot {}_{23|}a_{17} &= 4{,}942\,877 = {}_{28|}a_{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^5 \cdot a_{17,\overline{23}|} &= 12{,}216\,97 \\
a_{\overline{5}|} &= 4{,}629\,90 \\
\hline
\text{Summe} = a_{12,\overline{28}|} &= 16{,}846\,87\,.
\end{aligned}
$$

Das wäre, streng genommen, der Barwert einer Rente (Prämie), die in den ersten 5 Jahren auf jeden Fall, später aber nur im Lebensfalle zu zahlen wäre.

$$
\begin{aligned}
\text{Zähler} &= 4{,}942\,877 \\
\text{Nenner} &= 16{,}846\,87 \\
P_{12} &= 0{,}293\,400\,(3) \\
1{,}25 \cdot P_{12} &= 0{,}366\,750\,(4) \\
\mathfrak{p}_{12} &= 36{,}675\,\% \\
& \underline{36{,}70\,\%}\,.
\end{aligned}
$$

Sollte die Rückgewähr nicht mitversichert werden, so wäre für je 100 Mk. Jahresrente eine Jahresprämie von 36,70 Mk., für 600 Mk. Jahresrente also eine Prämie von 220,20 Mk. zu entrichten.

Für die Rückgewähr ergibt sich dann, da die ersten 5 Todesfallzahlungen vernachlässigt werden, zunächst der Barwert:

$$_{23}A_{17}^{<} = [6\,C_{17} + 7\,C_{18} + 8\,C_{19} + \ldots\ldots + 28\,C_{39}] : D_{17}$$

$$_{23}A_{17}^{<} = \{5\,[M_{17} - M_{40}] + [R_{17} - R_{40} - 23\,M_{40}]\} : D_{17}$$

$$\begin{aligned} M_{17} &= 16\,838{,}0363 \\ M_{40} &= 9\,285{,}3656 \\ \hline \text{Diff.} &= 7\,552{,}6707 = h_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{17} &= 486\,754{,}9256 \\ R_{40} &= 194\,669{,}0294 \\ 23 \cdot M_{40} &= 213\,563{,}4088 \\ \hline \text{Diff.} &= 78\,522{,}4874 = h_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5 \cdot h_1 + h_2) &= 116\,285{,}8409 \\ D_{17} &= 57\,273{,}31 \\ _{23}A_{17}^{<} &= 2{,}030\,367 \\ i &= 0{,}03 \\ v^5 &= 0{,}862\,609 \\ v^5 \cdot {}_{23}A_{17}^{<} &= 1{,}751\,413 = {}_{28}A_{12}^{<} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{17,\overline{23}|} &= 14{,}863\,82 \\ i &= 0{,}03 \\ v^5 &= 0{,}862\,609 \\ v^5 \cdot a_{17,\overline{23}|} &= 12{,}821\,66 \\ a_{\overline{5}|} &= 4{,}717\,10 \\ \hline \text{Summe} &= 17{,}538\,76 = a_{12,\overline{28}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Zähler} &= 1{,}751\,413 \\ \text{Nenner} &= 17{,}538\,76 \\ \text{Quotient} &= 0{,}099\,8596 = h_1 \\ 1{,}25\,h_1 &= 0{,}124\,8245 = h_2 \\ (1 - h_2) &= 0{,}875\,1755 = h_3 \\ \frac{\mathfrak{p}}{h_3} = \mathfrak{p}^r &= 0{,}419\,059 \end{aligned}$$

42,— %.

Da die Rückgewähr mitversichert werden soll, ist für 600 Mk. Jahresrente eine jährliche Prämie von 252 Mk. zu entrichten.

Daß an dem zurückzuzahlenden Betrag 3 % abgezogen werden sollen, braucht nicht berücksichtigt zu werden. Das ist nur eine Art Unkostenentschädigung, die zumal mit Rücksicht auf die möglicherweise schon im ersten Jahre zu leistende Rückgewähr mit Recht gefordert wird.

Daß die mit dem Hilfsverfahren ermittelte Prämie praktisch brauchbar ist, erkennt man leicht, wenn man sich zur Berechnung der Zusatzprämie einer Sterbetafel bedient, in der die niedrigen Altersklassen enthalten sind. So findet man zum Beispiel nach der alten Tafel der 17 englischen Gesellschaften die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} R_{12} &= 526\,430{,}68 \\ R_{40} &= 186\,528{,}61 \\ 28 \cdot M_{40} &= 235\,423{,}05 \\ \hline \text{Diff.} &= 104\,479{,}02 \\ D_{12} &= 65\,312{,}05 \\ {}_{28}A^{<}_{12} &= 1{,}599\,690 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N_{12} &= 1\,438\,701{,}57 \\ N_{40} &= 338\,818{,}10 \\ \hline \text{Diff.} &= 1\,099\,883{,}47 \\ a_{12,\overline{28}|} &= 16{,}840\,44 \\ \frac{A^{<}}{a} &= 0{,}094\,9910 = h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1{,}25 \cdot h &= 0{,}118\,7387(5) \\ (1 - 1{,}25 \cdot h) &= 0{,}881\,2612(5) \\ \mathfrak{p}^r &= 0{,}416\,165 \qquad \underline{41{,}70\,\%}\,. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also fast genau dieselbe Prämie wie nach dem Hilfsverfahren. Die Prämie der Grundversicherung ist dabei als richtig vorausgesetzt. Sie ließe sich aber mit Rentnertafel auch leicht als brauchbar nachweisen.

Wird die Rückgewähr nur zum Teil mitversichert, so ist folgendermaßen zu rechnen:

$$\mathfrak{p}^r = \frac{\mathfrak{p}}{1 - \vartheta \cdot 1{,}25 \cdot \dfrac{A^{<}}{a}}\,,$$

wobei dann für ϑ der entsprechende Teilsatz einzusetzen ist. Man erhält ohne weiteres:

ϑ	$\vartheta \cdot 1{,}25 \dfrac{A^{<}}{a} = h$	$1 - h$	$\dfrac{\mathfrak{p}}{1-h}$	
0,00	0,000 0000	1,000 0000	0,36675	36,70 %
0,25	0,031 2061	0,968 7939	0,37856	37,90 %
0,50	0,062 4122	0,937 5878	0,39116	39,20 %
0,75	0,093 6184	0,906 3816	0,40463	40,50 %
1,00	0,124 8245	0,875 1755	0,41906	42,— %.

Es ist zu beachten, daß die Werte ϑ zwar linear verlaufen, nicht aber die Prämienbeträge. Die Unterschiede der Prämiensätze weisen für gleiche Intervalle von ϑ eine Steigerung auf.

Aufgabe 91

Eine Versicherungsgesellschaft erhält von einem ihrer Vertreter folgendes Schreiben:

„Wie Ihnen bekannt ist, verhandle ich seit einiger Zeit mit einem 56jährigen Herrn wegen einer Rentenversicherung. Es soll ein Kapital von 25 000 Mk. eingezahlt werden. Ich habe demgemäß eine sofort beginnende Rente von 2100 Mk. angeboten. Die erste Zahlung soll aber möglicherweise bis zum 60. Lebensjahre aufgeschoben werden. Für diesen Fall habe ich nach dem Tarif eine Jahresrente von 2700 Mk. angeboten. Für den Fall, daß die erste Rente nach 1 Jahre fällig werden soll, habe ich also als Satz der Kaufsumme den Satz von 1190,50 % zugrunde gelegt, während ein Satz von 926,— % in Betracht kommt, wenn die erste Rente erst nach 4 Jahren fällig werden soll. Der Antragsteller möchte nun wissen, wie sich die Rente ändert, wenn er die Rückgewähr mitversichert. Diese denkt er sich folgendermaßen: Wird die Rente mit sofortigem Beginn des Rentenlaufs abgeschlossen, so soll bei seinem Ableben der Teil der Kaufsumme erstattet werden, der, ohne Berücksichtigung von Zinsen, noch nicht in Form von Renten zurückgezahlt worden ist. Wird die Versicherung dagegen mit Wartefrist abgeschlossen, so soll, wenn der Versicherte während der Wartefrist stirbt, die eingezahlte Kaufsumme ohne Zinsen zurückgezahlt werden. Später soll sich dann der im Todesfalle zu erstattende Betrag von Jahr zu Jahr um 10 % der Kaufsumme verringern, sodaß nichts mehr zurückzuzahlen wäre,

wenn der Versicherte im 14. Versicherungsjahre oder noch später sterben sollte. Ich habe den Antragsteller darauf aufmerksam gemacht, daß die Gesellschaft an dem zurückzuzahlenden Betrag auf alle Fälle eine Geschäftsgebühr von 3% abziehen wird, wogegen er nichts einzuwenden hat. Außerdem habe ich ihm geraten, für die Versicherung mit Aufschubsfrist darauf zu verzichten, daß die Rückgewähr über die Wartefrist hinaus ausgedehnt wird. Ich bitte Sie also, mir auch für diesen Fall die Jahresrente anzugeben. Die Kaufsumme von 25 000 Mk. soll für alle Fälle Geltung haben."

Wie ist diese Anfrage zu erledigen, wenn die Gesellschaft für die Zusatzversicherung mit einem festen Aufschlag von 5% der Nettozusatzprämie rechnet und für jedes Jahr der Aufschubsfrist noch einen weiteren Aufschlag von ½ % der Nettozusatzprämie hinzufügt? [Formeln (142), (147) und (148)].

Nach dem Tarif der Gesellschaft ist die Bruttokaufsumme

$$\mathfrak{A}_{56} = 11{,}9050 \text{ [nachschüssige Zahlung!]},$$
$$_{4|}\mathfrak{A}_{56} = \ \ 9{,}2600 \text{ [vorschüssige Zahlung!]}.$$

Für die sofort beginnende Rente sei die Rückgewähr zunächst nach der bequemeren Form eingeschlossen. Dann ist:

$$\mathfrak{A}^{r}_{56} = \frac{\mathfrak{A}_{56} - [1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1]\left[\dfrac{R_{56} - R_{56+k} - k \cdot M_{56+k}}{D_{56}}\right]}{1 - [1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1]\left[\dfrac{M_{56} - M_{56+k}}{D_{56}}\right]}.$$

Es ist zunächst k abzuschätzen.

Man trifft im großen und ganzen [wenigstens bei den hauptsächlich vorkommenden Altern] nahezu den richtigen Wert, wenn man die gewöhnliche Kaufsumme um ein Viertel erhöht.

Es ist

$$1{,}25 \cdot \mathfrak{A}_{56} = 14{,}88125, \text{ also } k = 14 .$$

Weiter folgt dann:

$$R_{56} = 73\,873{,}8767 \qquad M_{56} = 5\,595{,}6111$$
$$R_{70} = 17\,246{,}5332 \qquad M_{70} = 2\,309{,}2774$$
$$14 \cdot M_{70} = 32\,329{,}8836 \qquad \text{Diff.} = 3\,286{,}3337$$
$$\text{Diff.} = 24\,297{,}4599 \qquad D_{56} = 9\,187{,}359$$
$$D_{56} = 9\,187{,}359 \qquad {}_{14}A_{56} = 0{,}357\,7017$$
$${}_{14}A_{56}^{<1} = 2{,}644\,662 \qquad (1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1) = 1{,}120 = h\,.$$
$$\mathfrak{A}_{56} = 11{,}9050$$
$$h \cdot {}_{14}A_{56}^{<} = 2{,}9620 \qquad h \cdot {}_{14}A_{56} = 0{,}400\,6259$$
$$\text{Diff.} = 8{,}9430 = h_1 \qquad (1 - h \cdot {}_{14}A_{56}) = 0{,}599\,3741 = h_2$$

$$\mathfrak{A}^r = \frac{h_1}{h_2} = 14{,}9206$$
$$\underline{\mathfrak{A}^r = 1492{,}10\,\%}\,.$$

Für 1000 Mk. Einlage wäre also ein Rentensatz von $\underline{67{,}\text{—}\,^0/_{00}}$ festzusetzen, sodaß für 25 000 Mk. Kaufsumme eine Jahresrente von $\underline{1675 \text{ Mk.}}$ versichert werden könnte. Stirbt der Versicherte dann zum Beispiel im 8. Jahre, also nachdem 7 Renten ausgezahlt worden sind, so ist zurückzuzahlen ein Betrag von

$$25\,000 \text{ Mk.} - 8 \cdot 1675 \text{ Mk.} = \underline{11\,600 \text{ Mk.}}$$

Die Geschäftsgebühr braucht hier nicht abgezogen zu werden, weil schon dafür Sorge getragen ist, daß die Gesellschaft nichts zuzusetzen hat.

Wird die Rückgewähr dagegen genau nach dem Wunsche des Antragstellers eingerichtet, so ist:

$$\mathfrak{A}^r_{56} = \frac{\mathfrak{A}_{56} - [1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1] \left[\dfrac{R_{57} - R_{56+k+1} - k \cdot M_{56+k+1}}{D_{56}}\right]}{1 - [1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1] \left[\dfrac{M_{56} - M_{56+k+1}}{D_{56}}\right]}.$$

Hier wird man nun vorsichtshalber $\underline{k = 15}$ setzen, da die Rückgewähr doch erhöht ist und vorher schon $\mathfrak{A}^r$ nahezu gleich 15 war.

Man erhält dann:

$$R_{57} = 68\,278{,}2656$$
$$R_{72} = 12\,841{,}1629$$
$$15 \cdot M_{72} = 28\,347{,}9825$$
$$\text{Diff.} = 27\,089{,}1202$$
$$D_{56} = 9\,187{,}359$$
$${}_{1|15}A_{56}^{<1} = 2{,}948\,521$$

$$M_{56} = 5\,595{,}6111$$
$$M_{72} = 1\,889{,}8655$$
$$\text{Diff.} = 3\,705{,}7456$$
$$D_{56} = 9\,187{,}359$$
$${}_{16}A_{56} = 0{,}403\,3526(5)$$
$$(1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1) = 1{,}125 = h\,.$$

$$\mathfrak{A} = 11{,}9050$$
$$h \cdot {}_{1|15}A_{56}^{<} = 3{,}3171$$
$$\text{Diff.} = 8{,}5879 = h_1$$

$$h \cdot {}_{16}A_{56} = 0{,}453\,7717$$
$$(1 - h \cdot {}_{16}A_{56}) = 0{,}546\,2283 = h_2$$

$$\mathfrak{A}^r = \frac{h_1}{h_2} = 15{,}72218$$
$$\underline{\mathfrak{A}^r = 1572{,}20\,\%\,.}$$

Für 1000 Mk. Einlage wäre dann also ein Rentensatz von $\underline{63{,}60\,‰}$ festzusetzen, sodaß für 25 000 Mk. Kaufsumme eine Jahresrente von <u>1590 Mk.</u> versichert werden könnte. Im 8. Jahre wäre in diesem Falle ein Betrag von 25 000 Mk. — 7 · 1590 = 13 870 Mk. zu erstatten, woran aber die Geschäftsgebühr abzuziehen wäre. Es könnte also bar ein Betrag von 13 453,90 Mk. zurückgezahlt werden. Dem höheren Betrage der Rückgewähr entspricht ein geringerer Rentenbetrag.

Wird eine aufgeschobene Rente versichert, so ergibt sich zunächst:

$$M_{56} = 5\,595{,}6111$$
$$M_{60} = 4\,636{,}5911$$
$$\text{Diff.} = 959{,}0200$$
$$D_{56} = 9\,187{,}359$$
$${}_4A_{56} = 0{,}104\,3847$$

$$(1 + \beta_0 + n \cdot \beta_1) = 1{,}07 = h$$
$$h \cdot {}_4A_{56} = 0{,}111\,6916$$
$$(1 - h \cdot {}_4A_{56}) = 0{,}888\,3084$$
$$\mathfrak{A}^r = 10{,}424\,31$$

$$\underline{\mathfrak{A}^r = 1042{,}40\,\%\,.}$$

Für 1000 Mk. Einlage wäre also ein Rentensatz von $\underline{96{,}\text{--}\,‰}$ festzusetzen, sodaß für 25 000 Mk. Kaufsumme

eine Jahresrente von 2400 Mk. versichert werden könnte. Stirbt der Versicherte dann während der Aufschubsfrist, so ist ein Betrag von 24 250 Mk. zurückzuzahlen.

Wird die Rückgewähr über die Aufschubsfrist hinaus ausgedehnt, so ist:

$$Z\mathfrak{A} = \frac{[C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + C_{x+3} + 0{,}9\,C_{x+4} + 0{,}8\,C_{x+5} + \ldots + 0{,}1\,C_{x+12}]}{D_x} \cdot \mathfrak{A}$$

also

$$\mathfrak{A}_x^r = \frac{\mathfrak{A}_x}{1 - [1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1] \left[\frac{(M_x - M_{x+14}) - 0{,}1\,(R_{x+4} - R_{x+14} - 10\,M_{x+14})}{D_{56}}\right]}$$

Obwohl die Rückgewähr nur 9 Jahre über die Aufschubsfrist hinaus ausgedehnt wird, richtet man die Formel doch so ein, daß sie $4 + 10 = 14$ Jahre umfaßt, weil das für die Berechnung bequemer ist. Der zuviel gezählte Wert C_{x+13}, der in der Differenz $(M_x - M_{x+14})$ enthalten ist, wird durch den zweiten Teil des Klammerausdrucks wieder aufgehoben. Für k genügt natürlich der Wert 13.

Man erhält also:

$$\begin{array}{rl} R_{60} = & 52\,924{,}4209 \\ R_{70} = & 17\,246{,}5332 \\ 10 \cdot M_{70} = & 23\,092{,}7740 \\ \hline \text{Diff.} = & 12\,585{,}1137 = h \\ 0{,}1 \cdot h = & 1\,258{,}5114 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} M_{56} = & 5\,595{,}6111 \\ M_{70} = & 2\,309{,}2774 \\ \hline \text{Diff.} = & 3\,286{,}3337 \\ 0{,}1 \cdot h = & 1\,258{,}5114 \\ \hline \text{Diff.} = & 2\,027{,}8223 \end{array}$$

Zur Probe!

$$\begin{array}{rl} R_{x+n} = & 52\,924{,}4209 \\ R_{x+n+t} = & 17\,246{,}5332 \\ \hline \text{Diff.} = & 35\,677{,}8877 \\ \varepsilon \cdot \text{Diff.} = & 3\,567{,}7888 \\ M_x = & 5\,595{,}6111 \\ \hline \text{Diff.} = & 2\,027{,}8223\ , \end{array}$$

wie vorher.

$$D_{56} = 9\,187{,}359$$
$${}_{14}A^{>}_{56} = 0{,}220\,7187$$
$$(1 + \beta_0 + k \cdot \beta_1) = 1{,}115 = h_1$$
$$h_1 \cdot {}_{14}A^{>}_{56} = 0{,}246\,1014$$
$$\left(1 - h_1 \cdot {}_{14}A^{>}_{56}\right) = 0{,}753\,8986$$
$$\mathfrak{A}^{r} = 12{,}282\,82$$
$$\underline{\mathfrak{A}^{r} = 1228{,}30\ \%}\ .$$

Für 1000 Mk. Einlage wäre also ein Rentensatz von $\underline{81{,}40\ ^0/_{00}}$ festzusetzen, sodaß für 25 000 Mk. Kaufsumme eine Jahresrente von $\underline{\text{2035 Mk.}}$ versichert werden könnte. Stirbt der Versicherte dann in den ersten 4 Jahren, so ist ein Betrag von 24 250 Mk. zurückzugeben. In jedem folgenden Jahr ermäßigt sich dann der beim Ableben zurückzuzahlende Betrag um je 2425 Mk., also um etwas mehr als den Betrag der inzwischen fällig gewordenen Jahresrente.

Aufgabe 92

Auf das Leben eines 45jährigen soll eine Unfallversicherung mit Prämienrückgewähr abgeschlossen werden. Die einfache Unfallversicherungsprämie beliefe sich auf 100 Mk. Die Versicherung soll aber auf eine Dauer von 10 Jahren in der Weise abgeschlossen werden, daß die vollen eingezahlten Prämien ohne Zinsen zurückgegeben werden können, wenn der Versicherte während der 10jährigen Vertragsdauer sterben sollte. Ist der Versicherte nach 10 Jahren noch am Leben, so sollen ebenfalls alle 10 Jahresprämien ohne Zinsen zurückgegeben werden. Die Gesellschaft berechnet die volle „rückgewährberechtigte“ Prämie, indem sie zur Zusatzprämie noch einen Aufschlag von 10 % hinzufügt. Welche Bruttoprämie ist zu fordern und wie können die Rückkaufswerte bemessen werden, wenn die Versicherung vom 2. Jahre an rückkaufsfähig sein soll,

und wenn als untere Grenze des Rückkaufswertes ein Betrag von 75 % des vorhandenen Deckungskapitals festgelegt ist? [Formeln (150) und (124 d)].

Berechnet man die Prämie gleichzeitig mit den Zahlen der Toten und mit denen der Lebenden, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
R_{45} &= 150\,611{,}0321 \\
R_{55} &= 79\,705{,}6027 \\
10 \cdot M_{55} &= 58\,317{,}2600 \\
\hline
\text{Diff.} &= 12\,588{,}1694 \\
10 \cdot D_{55} &= 97\,532{,}950(0) \\
\hline
\text{Summe} &= 110\,121{,}119(4) \\
D_{45} &= 16\,525{,}11 \\
\text{Quotient} &= 6{,}663\,866 = h_1 \\
a_{45,\overline{10}|} &= 8{,}044\,216 \\
P &= 0{,}828\,404(7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{45} &= 2\,906\,486{,}89 \\
S_{55} &= 1\,072\,285{,}79 \\
10 \cdot N_{55} &= 1\,159\,664{,}63 \\
\hline
\text{Diff.} &= 674\,536{,}47 \\
D_{45} &= 16\,525{,}11 \\
\text{Quotient} &= 40{,}818\,88 = h_2 \\
d &= 0{,}033\,816\,425 \\
d \cdot h_2 &= 1{,}380\,349 = a' \\
\frac{a'}{a} &= 0{,}171\,5952 = h_3 \\
(1 - h_3) = P &= 0{,}828\,404(8)
\end{aligned}$$

$$\underline{P = 82{,}84\,\%\ .}$$

Man gibt die Prämie gewöhnlich für 100 Mk. der „rückgewährberechtigten" Prämie an. Weiter ist dann:

$$\begin{aligned}
(1+\gamma)\,P &= 0{,}911\,245(3) \\
[1-(1+\gamma)\,P] &= 0{,}088\,754(7) = h_4 \\
\frac{1}{h_4} &= 11{,}267\,01 \\
\underline{\mathfrak{F}} &\underline{= 11{,}267}\ .
\end{aligned}$$

Mit $\mathfrak{F}$ ist dabei der Faktor bezeichnet, mit dem man die gewöhnliche Prämie [die sogenannte Risikoprämie] zu multiplizieren hat, wenn man die „rückgewährberechtigte" Prämie ermitteln will. Es ist dann also

$$\mathfrak{p}^r = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{U}$$

$$\underline{\mathfrak{p}^r = 1126{,}70 \text{ Mk.}}$$

Daß die Prämie trotz des geringen Zuschlags [er pflegt im allgemeinen höher bemessen zu werden als

auf 10%] so hoch ausfällt, kann nicht Wunder nehmen, da ja zugleich mit den Unkosten auch die Unfallrisikoprämie aus den Zinsen gedeckt werden muß.

Die Deckungskapitale berechnet man nach der „Rekursionsformel“ ($124^{\underline{d}}$), wobei man die Faktoren φ_{x+k} ohne weiteres aus der Tafel entnehmen kann. Die Werte Π berechnet man hier am besten aus den Sterbenswahrscheinlichkeiten. Zu beachten hat man, daß man entsprechend der Steigerung des Wagnisses nicht mit den einfachen Werten von Π, sondern mit den Produkten $m \cdot \Pi$ zu rechnen hat.

Man erhält die folgenden Werte:

$$P = 82{,}840\,4(8)\,\% \ .$$

m	φ_{x+m-1}	$\Pi_{x+m-1} = v \cdot q_{x+m-1}$	$(P - m \cdot \Pi_{x+m-1})$	${}_mV_x$	
1	1,050 095	1,388 840(6)%	81,4516(4)	85,5319(6)%	85,53%
2	1,050 638	1,438 106(3) „	79,9642(7)	173,8766(3) „	173,88%
3	1,051 288	1,496 975(8) „	78,3495(5)	265,1623(5) „	265,16%
4	1,052 052	1,566 058(0) „	76,5762(5)	359,5267(8) „	359,53%
5	1,052 953	1,647 391(3) „	74,6035(2)	457,1188(0) „	457,12%
6	1,054 122	1,752 637(7) „	72,3246(5)	558,0979(9) „	558,10%
7	1,055 381	1,865 845(4) „	69,7795(6)	662,6500(4) „	662,65%
8	1,056 772	1,990 589(4) „	66,9157(6)	770,9847(1) „	770,98%
9	1,058 277	2,125 169(1) „	63,7139(6)	883,3424(0) „	883,34%
10	1,059 893	2,269 217(4) „	60,1483(1)	999,9992(0) „	1000,—%.

Die Abweichungen von den theoretisch genauen Werten sind hier etwas größer als sonst, was natürlich auf die Eigenart der Berechnung zurückzuführen ist; immerhin aber sind die Werte noch genau genug.

Will man ein einzelnes Deckungskapital, zum Beispiel das 5. Deckungskapital bestimmen, so rechnet man natürlich am besten retrospektiv, also z. B. folgendermaßen:

$$
\begin{array}{rl}
R_{45} = & 150\,611{,}0321 \\
R_{50} = & 112\,338{,}2211 \\
5 \cdot M_{50} = & 34\,910{,}0085 \\
\hline
\text{Diff.} = & 3\,362{,}8025 \\
D_{50} = & 12\,861{,}58 \\
{}_5A_{45}^{<} \cdot {}_5\varphi_{45} = & 0{,}261\,4611 = h_1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
N_{45} = & 248\,898{,}01 \\
N_{50} = & 173\,867{,}58 \\
\hline
\text{Diff.} = & 75\,030{,}43 \\
D_{50} = & 12\,861{,}58 \\
r_{45,\overline{5}|} = & 5{,}833\,687 \\
P \cdot r_{45,\overline{5}|} = & 483{,}2654(3)\,\% = h_2\,.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
h_2 = & 483{,}2654(3)\,\% \\
h_1 = & 26{,}1461(1)\,\% \\
\hline
\text{Diff.} = {}_5V = & 457{,}1193(2)\,\% \qquad \underline{457{,}12\,\%}\,.
\end{array}
$$

Soll nun der Rückkaufswert mindestens nicht weniger als 75 % des Deckungskapitals ausmachen, so kann man im vorliegenden Falle zum Beispiel die Bestimmung treffen, daß für jedes noch nicht abgelaufene Jahr der Versicherungsdauer (der Prämienzahlungsdauer) ein Betrag von 3 % des Deckungskapitals abzuziehen sei. Als prämienfreie Summe wird man dabei zweckmäßig einfach den Betrag der eingezahlten Prämien festsetzen. Man erhält dann die folgende Zusammenstellung:

am Schlusse des	beläuft sich das Deckungskapital	der Abfindungssatz	der Rückkaufswert	die prämienfreie Summe
2. Versicherungsjahres	auf 173,88 %	auf 76 %	auf 132,15 %	auf 200 %
3. „	„ 265,16 „	„ 79 „	„ 209,48 „	„ 300 „
4. „	„ 359,53 „	„ 82 „	„ 294,81 „	„ 400 „
5. „	„ 457,12 „	„ 85 „	„ 388,55 „	„ 500 „
6. „	„ 558,10 „	„ 88 „	„ 491,13 „	„ 600 „
7. „	„ 662,65 „	„ 91 „	„ 603,01 „	„ 700 „
8. „	„ 770,98 „	„ 94 „	„ 724,72 „	„ 800 „
9. „	„ 883,34 „	„ 97 „	„ 856,84 „	„ 900 „
10. „	„ 1000,— „	„ 100 „	„ 1000,— „	„ 1000 „.

Die prämienfreie Versicherung ist dabei eine regelrechte gemischte Versicherung mit unveränderlicher Summe. Es wäre also technisch eigentlich richtiger, den Rückkaufswert als einmalige Nettoeinlage zu verwen-

den. Man erhielte da zum Beispiel für den Schluß des 5. Versicherungsjahres als prämienfreie Summe den Betrag:

$$ {}_5W = \frac{0{,}85 \cdot {}_5V}{A_{50,\overline{5}|}} = \frac{388{,}55\,\%}{0{,}847\,76} = \underline{458{,}33\,\%}\ . $$

Auch hier sind also die prämienfreien Summen etwas zu hoch, wenn sie nach dem Näherungsverfahren bemessen werden. Da es sich aber nicht um ausgesprochene Lebensversicherungswagnisse handelt, so kann das Näherungsverfahren unbedenklich zugelassen werden, zumal da sonst die prämienfreie Summe vielfach sogar hinter dem vorhandenen Deckungskapital zurückbliebe.

Aufgabe 93

Auf das Leben eines 57jährigen Mannes soll eine Rentenversicherung abgeschlossen werden. Es soll ein Kapital von 10 000 Mk. eingezahlt werden. Der Rentenlauf soll entweder sofort beginnen oder 3 Jahre aufgeschoben werden. Welche Rentenbeträge können versichert werden, wenn die Renten alljährlich, halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich ausgezahlt werden sollen? Wie kann die Rentenzahlung geregelt werden, wenn die halbjährige Rentenzahlung gewählt wird, und wenn es dem Versicherten frei stehen soll, während der 3jährigen Wartefrist nach Belieben zu bestimmen, daß die Rentenzahlung sofort beginnen solle? Was hat zu geschehen, wenn die Versicherung mit sofortigem Beginn des Rentenlaufs abgeschlossen ist, und wenn dann nach einigen Jahren die Rentenzahlungsart abgeändert werden soll? [Die Gesellschaft rechnet wegen der Unzulänglichkeit der Tafel mit einem Aufschlag von $12\frac{1}{2}\,\%$]. [Formeln ($151\underline{a}$), ($151\underline{b}$) und (155)].

Zunächst erhält man für die unmittelbare Rente:

$$N_{58} = 88\,387{,}115$$
$$D_{57} = 8\,638{,}694$$
$$a_{57} = 10{,}231\,54$$
$$1{,}125 \cdot a_{57} = 11{,}510\,48\,.$$

Es wird eine Kaufsumme von 1151 % festgesetzt, wenn die Rente ganzjährig gezahlt werden soll. Für die unterjährige Zahlung kommen die üblichen Aufschläge μ hinzu. Es ergibt sich folgendes:

Zahlungsart	Aufschlag μ	Kaufsumme	Jahresrente	für 10000 Mk. Einlage
ganzjährig	—	1151,— %	86,88 ‰	868,80 Mk.
halbjährig	25,— %	1176,— „	85,04 „	850,40 „
vierteljährig	37,50 „	1188,50 „	84,12 „	841,20 „
monatlich	45,85 „	1196,85 „	83,52 „	835,20 „ .

Die Rentensätze sind so zu bemessen, daß sie sich ohne Rest in m Raten teilen lassen.

Für die aufgeschobene Rente erhält man:

$$N_{60} = 72\,687{,}190$$
$$D_{57} = 8\,638{,}694$$
$${}_{3}a|_{57} = 8{,}414\,14\,.$$

Zur Probe!

$$a_{57,\overline{3}|} = 2{,}817\,40$$
$${}_{3}|a_{57} = 8{,}414\,14$$
$$\text{Summe} = 11{,}231\,54 = a_{57}$$
$$a_{57} = 10{,}231\,54\;,$$

was mit dem vorher gefundenen Wert übereinstimmt.

Weiter ergibt sich:

$$D_{60} = 7\,094{,}612$$
$$D_{57} = 8\,638{,}694$$
$${}_{3}E_{57} = 0{,}821\,260\;.$$

Alsdann ist also zunächst:

$$1{,}125 \cdot {}_{3}|a_{57} = 9{,}465\,91\;.$$

Für die ganzjährige Zahlung gilt also eine Kaufsumme von 946,60 %. Die Zusammenstellung liefert dann die folgenden Werte:

Zahlungsart	Abzug $\mu \cdot {}_3E_{57}$	Kaufsumme	Jahresrente	für 10 000 Mk. Einlage
ganzjährig	—	946,60 %	105,64 ‰	1056,40 Mk.
halbjährig	20,50 %	926,10 „	107,98 „	1079,80 „
vierteljährig	30,70 „	915,90 „	109,20 „	1092,— „
monatlich	37,60 „	909,— „	110,04 „	1100,40 „ .

Daß die Jahresrente sich hier bei unterjähriger Zahlung erhöhen muß, versteht sich von selbst. Es wird ja bei unterjähriger Zahlung zunächst weniger ausgezahlt als bei ganzjähriger Zahlung.

Soll der Beginn der Rentenzahlung nach Belieben gewählt werden, so ist die Versicherung als gewöhnliche Rentenversicherung mit sofort beginnendem Rentenlauf anzusehen. Die nicht abgehobenen Renten sind dann als Kaufsummen für eine Zusatzrente zu verwenden.

Bei ganzjähriger Zahlung zum Beispiel ergibt sich folgendes:

$$N_{59} = 80\,279{,}730 \qquad N_{60} = 72\,687{,}190$$
$$D_{58} = 8\,107{,}385 \qquad D_{59} = 7\,592{,}540$$
$$a_{58} = 9{,}902\,05 \qquad a_{59} = 9{,}573\,50$$
$$1{,}125 \cdot a_{58} = \underline{1114{,}—\,\%} \qquad 1{,}125 \cdot a_{59} = \underline{1077{,}—\,\%}$$
$$\text{Rentensatz} = \underline{89{,}77\,‰}\,, \qquad \text{Rentensatz} = \underline{92{,}85\,‰}\,.$$

Zunächst ist also eine Rente von 86,88 ‰ versichert. Wird diese Rente nach einem Jahre nicht abgehoben, so kann als Zusatzrente ein Betrag von $0{,}089\,77 \cdot 86{,}88\,‰ = \underline{7{,}80\,‰}$ versichert werden. Die Rente erhöht sich somit auf 94,68 ‰. Wird auch diese Rente, die nach 2 Jahren fällig ist, wieder als Zusatzkaufsumme verwendet, so ergibt sich als weitere Zusatzrente ein Betrag von $0{,}092\,85 \cdot 94{,}68\,‰ = \underline{8{,}79\,‰}$. Nunmehr erhöht sich die Rente also auf 103,47 ‰.

Hinter dem Betrag der „aufgeschobenen“ Rente bleibt diese Rente etwas zurück. Das muß auch so sein, weil der Versicherungsnehmer nach Belieben bestimmen kann, wann die Rentenzahlung beginnen soll, während das nicht möglich ist, wenn die Versicherung mit fester Aufschubsfrist abgeschlossen ist. Beide Formen der Versicherung haben ihre Vorzüge.

Ist die Versicherung mit unterjähriger Zahlung abgeschlossen, so wird man den Rentensatz, zu dem man die nicht abgehobene Rentenrate als Zusatzkaufsumme anlegt, im allgemeinen „interpolieren“, wogegen hier durchaus nichts einzuwenden ist, selbst wenn man für die Grundversicherung die Bestimmung getroffen hat, daß nur voll durchlebte Altersjahre für die Bemessung des Eintrittsalters in Betracht kommen sollen. Man hat zum Ausgleich dafür mit der Zusatzkaufsumme ja Aufschläge erhoben, die man eigentlich hätte weglassen oder wenigstens hätte ermäßigen können [z. B. Provisionsaufschläge].

Bei halbjähriger Rentenzahlung gestalten sich die Ergebnisse dann folgendermaßen:

Zunächst ist:

$$\begin{aligned} N_{61} &= 65\,592{,}578 \\ D_{60} &= 7\,094{,}612 \\ a_{60} &= 9{,}245\,41 \\ 1{,}125 \cdot a_{60} &= 10{,}401\,09 \\ \text{Kaufsumme} &= \underline{\underline{1040{,}-\ \%}}\,. \end{aligned}$$

Man stellt dann die folgenden Tabellen zusammen:

I. *Kaufsumme für 100 Mk. Jahresrente.*

Alter: Jahre	bei 1/1 jähriger Zahlung	bei 1/2 jähriger Zahlung	bei 1/4 jähriger Zahlung	bei 1/12 jähriger Zahlung
57	1151,— Mk.	1176,— Mk.	1188,50 Mk.	1196,85 Mk.
58	1114,— „	1139,— „	1151,50 „	1159,85 „
59	1077,— „	1102,— „	1114,50 „	1122,85 „
60	1040,— „	1065,— „	1077,50 „	1085,85 „ .

II. *Jahresrente für 1000 Mk. Kaufsumme.*

Alter: Jahre	bei $^1/_1$ jähriger Zahlung	bei $^1/_2$ jähriger Zahlung	bei $^1/_4$ jähriger Zahlung	bei $^1/_{12}$ jähriger Zahlung
57	86,88 Mk.	85,04 Mk.	84,12 Mk.	83,52 Mk.
58	89,77 „	87,80 „	86,84 „	86,16 „
59	92,85 „	90,74 „	89,72 „	89,04 „
60	96,15 „	93,90 „	92,80 „	92,04 „ .

Es ergeben sich dann die folgenden Werte:

Es gilt	der Rentensatz	also die Zusatzrente	die Gesamtrente
zu Beginn	85,04 ‰	—	85,04 ‰
nach $^1/_2$ Jahr	86,38 „	3,68 ‰	88,72 „
„ 1 „	87,80 „	3,90 „	92,62 „
„ $1^1/_2$ Jahren	89,27 „	4,14 „	96,76 „
„ 2 „	90,74 „	4,38 „	101,14 „
„ $2^1/_2$ „	92,32 „	4,66 „	105,80 „ .

Wieder ist die Jahresrente, die nach 3 Jahren erreicht wird, etwas kleiner, als wenn die Versicherung gleich von vornherein mit fester Wartefrist abgeschlossen worden wäre. Denn dann ergäbe sich bei halbjähriger Zahlung eine Jahresrente von 1079,80 Mk. für 10 000 Mk. Einlage, während sich bei beliebiger Festsetzung des Beginnes nur eine Jahresrente von 1058 Mk. ergibt.

Ist die Versicherung mit sofortigem Beginn des Rentenlaufs abgeschlossen, und soll die Rentenzahlungsart abgeändert werden, so ist stets darauf zu achten, daß in einem bestimmten Zeitpunkte niemals infolge der Aenderung mehr ausgezahlt werden darf, als ursprünglich an Auszahlung vorgesehen war. Geschähe das doch, so würden die schlechten Wagnisse mit Hilfe einer solchen Aenderung eine größere Leistung für sich herbeiführen können, als sie ihnen zusteht. Es kann also zum Beispiel die ganzjährige Zahlung jederzeit in die unterjährige Zahlung umgewandelt werden, ohne daß ein Zahlungstermin auszufallen braucht. Umgekehrt aber kann zum Beispiel die vierteljährige Zahlung nur in der

Weise in die ganzjährige Zahlung umgewandelt werden, daß zunächst drei Zahlungstermine übergangen werden.

Beispiele. Es soll nach 3 Jahren umgewandelt werden:

I. Ganzjährige in vierteljährige Zahlung!

Ursprüngliche Rente	86,88 ‰	868,80 Mk.
Deckungskapital (vor dem Zahlungstermin)	$a_{60} = 10{,}24541$	
für die ursprüngliche Rente	890,12 ‰	8901,20 Mk.
angelegt als Nettokaufsumme bei ¼jähriger Zahlung	$a_{60}^{(4)} = 9{,}87041$	
neue Jahresrente	90,20 ‰	902,— Mk.
sofort zu zahlende Rentenrate		225,50 Mk.

II. Halbjährige in monatliche Zahlung!

Ursprüngliche Rente	85,04 ‰	850,40 Mk.
Deckungskapital (vor dem Zahlungstermin)	$a_{60}^{(2)} = 9{,}99541$	
für die ursprüngliche Rente	850,— ‰	8500,— Mk.
angelegt als Nettokaufsumme bei monatl. Zahlung	$a_{60}^{(12)} = 9{,}78708$	
neue Jahresrente	86,88 ‰	868,80 Mk.
sofort zu zahlende Rentenrate		72,40 Mk.

III. Vierteljährige in ganzjährige Zahlung!

Ursprüngliche Rente	84,12 ‰	841,20 Mk.
Deckungskapital (vor dem Zahlungstermin)	$a_{60}^{(4)} = 9{,}87041$	
für die ursprüngliche Rente	830,30 ‰	8303,— Mk.
angelegt als Nettokaufsumme bei ganzjähr. Zahlung	$a_{60} = 9{,}24541$	
neue Jahresrente	89,81 ‰	898,10 Mk.

Zum ersten Male auszuzahlen nach einem Jahre!
Am Umwandlungstermin wird keine Rente gezahlt.

Hier kann auch folgendermaßen gerechnet werden:

Ursprüngliche Rente	84,12 ‰	841,20 Mk.
Deckungskapital (nach dem Zahlungstermin)	$a_{60}^{(4)} = 9{,}62041$	
für die ursprüngliche Rente	809,27 ‰	8092,70 Mk.
angelegt als Nettokaufsumme bei ganzjähr. Zahlung	$a_{60} = 9{,}24541$	
neue Jahresrente	87,53 ‰	875,30 Mk.

Zum ersten Male auszuzahlen nach einem Jahre!

Am Umwandlungstage wird die ursprüngliche Rentenrate von 210,30 Mk. noch einmal ausgezahlt.

Aufgabe 94

Auf das Leben eines 19jährigen soll eine Studienrente versichert werden, die 6 Jahre hindurch laufen und in Monatsraten ausgezahlt werden soll. Die Monatsrate soll 150 Mk. betragen. Die Renten werden nachschüssig gezahlt. Für den Fall des Ablebens ist eine „Sterberente" mitversichert; es wird dann für die Zeit vom letzten Rentenzahlungstage bis zum Todestage noch eine Teilrente [„pro rata temporis"] ausgezahlt. Die Gesellschaft rechnet mit einem Aufschlage von 5% der Nettokaufsumme. Welches Einlagekapital ist einzuzahlen? [Formel (156a)].

$$N_{20} = 1\,031\,102{,}57$$
$$N_{26} = 759\,900{,}24$$
$$\text{Diff.} = 271\,202{,}33$$
$$D_{19} = 52\,505{,}56$$
$$a_{19,\overline{6}|} = 5{,}165\,212$$
$$D_{25} = 40\,448{,}62$$
$$D_{19} = 52\,505{,}56$$
$${}_6E_{19} = 0{,}770\,368\,(3)$$
$$(1 - {}_6E_{19}) = 0{,}229\,631\,(7) = h_1$$

$$\mu = 0{,}458\,333\ldots$$
$$\mu \cdot h_1 = 0{,}105\,248$$
$$a_{19,\overline{6}|} = 5{,}165\,212$$
$$\text{Summe} = 5{,}270\,460 = h_2$$
$$(1{,}05) \cdot h_2 = 5{,}533\,983$$

553,40 % .

ohne Sterbfallrente!

Wenn auf die Mitversicherung der Sterbfallrente verzichtet würde, so ergäbe sich für 150 Mk. Monatsrente, also für 1800 Mk. Jahresrente ein Einlagekapital von 9961,20 Mk.

Die Mitversicherung der Sterbfallrente ist als Risikoversicherung anzusehen. Es wird auf die Dauer von 6 Jahren für den Fall des Ablebens ein nicht eindeutig bestimmter Betrag als Sterbfallsumme versichert. Der Betrag schwankt zwischen den Grenzwerten 0 und 150 Mk. [$\frac{1}{12}$ der Einheit]. Im Mittel ist also eine Sterbfallsumme von 75 Mk. [$\frac{1}{24}$ der Einheit] zu versichern.

Dann ist also:

$$
\begin{aligned}
M_{19} &= 15\,861{,}8004 \\
M_{25} &= 13\,383{,}6818 \\
\hline
\text{Diff.} &= 2\,478{,}1186 \\
D_{19} &= 52\,505{,}56 \\
{}_6A_{19} &= 0{,}047\,1973 \\
\frac{1}{24}\cdot{}_6A_{19} &= 0{,}001\,967 \\
h_2 &= 5{,}270\,460 \\
\hline
\text{Summe} &= 5{,}272\,427 = h_3 \\
(1{,}05)\cdot h_3 &= 5{,}536\,048 \qquad \underline{553{,}60\ \%\ .}
\end{aligned}
$$

Infolge der Mitversicherung der Sterberente erhöht sich das Einlagekapital auf 9964,80 Mk.

Aufgabe 95

Ein Brautpaar will am Hochzeitstage 1000 Mk. als einmalige Einlage für eine Versicherung auf den Lebensfall einzahlen. Der Mann ist dann 29 Jahre, seine Frau 26 Jahre alt. Welches Kapital kann ihnen am Tage der silbernen Hochzeit ausgezahlt werden, unter der

Voraussetzung also, daß sie dann beide noch am Leben sind? Wie hoch hat sich die mit unbedingter Verlustgefahr eingezahlte Einlage alsdann verzinst? Es ist angenommen, die Gesellschaft rechne mit einem Aufschlag von 16% der Nettoeinlage, wovon 3½% für Verwaltungskosten und 12½% wegen der Unzulänglichkeit der Tafel [M. u. W I, 3½%] erhoben werden. [Formeln (161) und (162)].

Es ist:

$$ {}_{25}E_{29,26} = \frac{D_{54,51}}{D_{29,26}} = \frac{l_{54} \cdot D_{51}}{l_{29} \cdot D_{26}} $$

$$ l_{54} = 66\,251 \qquad D_{51} = 12\,201{,}23 $$

$$ l_{29} = 92\,378 \qquad D_{26} = 38\,747{,}18 $$

$$ l_{54} \cdot D_{51} = D_{54,51} = 808\,343\,689 \quad [\text{oder } 808\,344 \cdot 10^3] $$

$$ l_{29} \cdot D_{26} = D_{29,26} = 3\,579\,386\,994 \quad [\text{oder } 3\,579\,387 \cdot 10^3] $$

$$ \text{Quotient} = {}_{25}E_{29,26} = 0{,}225\,8330 $$

$$ 1{,}16 \cdot {}_{25}E_{29,26} = {}_{25}\mathfrak{E}_{29,26} = 0{,}261\,9663 $$

$$ \underline{\mathfrak{E} = 262{,}-\ {}^0/_{00}}\,. $$

Für 1000 Mk. Lebensfallsumme ist eine Einlage von 262 Mk. erforderlich. Für 1000 Mk. Einlage kann also ein Kapital von 3816,80 Mk. versichert werden. Es ergibt sich dann weiter:

$$ i = \sqrt[25]{\frac{3816{,}80}{1000{,}-}} - 1 = \sqrt[25]{R} - 1 $$

$$ R = 3{,}816\,80 $$

$$ \log R = 0{,}581\,6994 $$

$$ \frac{1}{25} \log R = 0{,}023\,2680 $$

$$ 1 + i = 1{,}055\,04 $$

$$ i = 0{,}055\,04\,. $$

Es ergibt sich also fast genau eine Verzinsung von 5½% .

Aufgabe 96

Zwei Schwestern, von denen die eine 55 Jahre, die andere 60 Jahre alt ist, zahlen ein Kapital von 30 000 Mk. als Kaufsumme für eine Rentenversicherung auf verbundene Leben ein. Die Gesellschaft rechnet mit der britischen Rentnersterblichkeitstafel und einem Aufschlag von 4 % der Nettokaufsumme. Als Rentenbarwerte gelten die folgenden Werte:

$$a_{55} = 13{,}264\,,$$
$$a_{60} = 11{,}691\,,$$
$$a_{55,60} = 9{,}568\,.$$

Welche Renten können festgesetzt werden, wenn die Renten allmonatlich gezahlt werden sollen und wenn entweder bestimmt wird, daß die Rente unvermindert bis zum Tode der überlebenden Versicherten weiter gezahlt werden soll, oder wenn bestimmt wird, daß sie sich beim Ableben der zuerst sterbenden Versicherten auf drei Viertel ihres ursprünglichen Betrages ermäßigen soll? Wie hoch kann die bei Lebzeiten beider Schwestern zu zahlende Rente bemessen werden, wenn bestimmt wird, daß nach dem Ableben der zuerst sterbenden Schwester an die überlebende eine Monatsrente von 135 Mk. weitergezahlt werden soll? [Formeln (168), (169) und (170$\underline{^{a}}$)].

Zunächst ist:

$$\begin{array}{rl}
a_{55} = & 13{,}264 \\
a_{60} = & 11{,}691 \\
\hline
\text{Summe} = & 24{,}955 \\
a_{55,60} = & 9{,}568 \\
\hline
\text{Diff.} = a_{\overline{55,60}} = & 15{,}387 \\
1{,}04 \cdot a_{\overline{55,60}} = & 16{,}002
\end{array} \qquad \underline{1600\ \%}\,.$$

Bei vollem Rentenübergang wird eine Kaufsumme von <u>1600 Mk.</u> für 100 Mk. Jahresrente festgesetzt werden, wenn die Renten ganzjährig zu zahlen sind. Für die monatliche Zahlung wird man den genauen Auf-

schlag von 45,85 % entsprechend der Abrundung des Satzes der Kaufsumme auf 46 % festsetzen. Man erhält dann eine Jahresrente von 60,72 ‰, für 30 000 Mk. Kaufsumme also eine Jahresrente von 1821,60 Mk. und somit eine Monatsrate von 151,80 Mk.

Soll die Rente an die überlebende Schwester nur mit drei Vierteln übergehen, so ist:

$$\frac{3}{4}\,a_{55} = 9{,}948(00)$$

$$\frac{3}{4}\,a_{60} = 8{,}768(25)$$

$$\text{Summe} = 18{,}716(25)$$

$$\frac{1}{2}\,a_{55,60} = 4{,}784(00)$$

$$\text{Diff.} = a_{\overline{55,60}}^{\,3/4} = 13{,}932(25)$$

$$1{,}04 \cdot a_{\overline{55,60}}^{\,3/4} = 14{,}489(5)$$

bei ganzjähriger Zahlung 1449 %,
bei monatlicher Zahlung 1495 %.

Bei monatlicher Zahlung ergibt sich eine Jahresrente von 66,89 ‰, die aus Zweckmäßigkeitsgründen auf 66,72 ‰ zu ermäßigen ist, damit sich der fürs Tausend angegebene Rentensatz ohne Rest auf 12 Zahlungen verteilen läßt, auch wenn die Rente später auf drei Viertel ihres ursprünglichen Betrages herabgesetzt wird. Es ergibt sich dann also für 30 000 Mk. Kaufsumme zunächst eine Jahresrente von 2001,60 Mk. und somit eine Monatsrate von 166,80 Mk. Sobald dann eine der beiden Versicherten stirbt, ermäßigt sich die Jahresrente auf 1501,20 Mk., die Monatsrate also auf 125,10 Mk.

Soll die Rente an die überlebende Schwester mit einer Monatsrate von 135 Mk. übergehen, so ist zunächst ε zu bestimmen. Man hat allgemein die Gleichung:

$$a_{\overline{x,y}}^{\,\varepsilon} = \varepsilon \cdot a_x + \varepsilon \cdot a_y - (2\,\varepsilon - 1)\, a_{x,y}\,.$$

Dann ist $\frac{1}{a_{\overline{x,y}}^{\varepsilon}}$ der Rentensatz, der bei Lebzeiten beider Versicherten Geltung hat, und $\varrho = \varepsilon \cdot \frac{1}{a_{\overline{x,y}}^{\varepsilon}}$ der Rentensatz, mit dem die Rente an die überlebende Versicherte übergeht. Es ist also

$$a_{\overline{x,y}}^{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varrho}, \text{ und somit}$$

$$\varepsilon = \varepsilon \cdot \varrho \cdot a_x + \varepsilon \cdot \varrho \cdot a_y - 2\,\varepsilon \cdot \varrho \cdot a_{x,y} + \varrho \cdot a_{x,y}\,.$$

Man erhält also die Bestimmungsgleichung:

$$\varepsilon = \frac{\varrho \cdot a_{x,y}}{1 - \varrho\,[a_x + a_y - 2\,a_{x,y}]}\,.$$

Wendet man die Gleichung an, so muß man allerdings berücksichtigen, daß die Barwerte mit Zuschlägen versehen sind. Man darf also unter den Werten *a* nicht die Nettobarwerte verstehen, sondern man muß darunter Bruttowerte verstehen, die mit demselben Zuschlag zu ermitteln sind, mit dem die Bruttokaufsumme selbst berechnet worden ist.

Bezeichnet man diese Bruttowerte mit a' und berücksichtigt man, daß $\varrho = \frac{12 \cdot 135 \text{ Mk.}}{30\,000 \text{ Mk.}} = 0{,}054$ ist, so erhält man die Gleichung:

$$\varepsilon = \frac{0{,}054 \cdot a_{55,60}}{1 - 0{,}054\,[a'_{55} + a'_{60} - 2\,a'_{55,60}]}$$

Alsdann ergibt sich:

$$\begin{aligned} a'_{55} &= 1{,}04 \cdot a_{55} + 0{,}458\,33 = 14{,}253 \\ a'_{60} &= 1{,}04 \cdot a_{60} + 0{,}458\,33 = 12{,}617 \\ a'_{55,60} &= 1{,}04 \cdot a_{55,60} + 0{,}458\,33 = 10{,}409 \\ [a'_{55} + a'_{60} - 2\,a'_{55,60}] &= 6{,}052 = \mathrm{h} \\ 1 - 0{,}054\,\mathrm{h} &= 0{,}6732 = \text{Nenner} \\ 0{,}054 \cdot a'_{55,60} &= 0{,}5621 = \text{Zähler} \\ \underline{\varepsilon = 0{,}8350} & \qquad \underline{83\tfrac{1}{2}\,\%}\,. \end{aligned}$$

Die Rente muß also zum Satze von 83½% an die überlebende Schwester übergehen, wenn sie dann gerade 135 Mk. im Monat ausmachen soll. In der Tat erhält man:

$$\begin{aligned} 0{,}835 \cdot a_{55} &= 11{,}075(44) \\ 0{,}835 \cdot a_{60} &= 9{,}761(99) \\ \hline \text{Summe} &= 20{,}837(43) \\ 0{,}670 \cdot a_{55,60} &= 6{,}410(56) \\ \hline \text{Diff.} = a\frac{0{,}835}{55{,}60} &= 14{,}426(87) = \text{h} \\ 1{,}04 \cdot \text{h} &= 15{,}003(94) \\ \mu &= 0{,}458(33) \\ \hline a' &= 15{,}462(27) \qquad \underline{1546{,}30\,\%}\,. \end{aligned}$$

Eine Kaufsumme von 1546,30% ergibt einen Rentensatz von 64,67 ‰, der auf 64,68 ‰ zu erhöhen wäre, damit sich 12 gleiche Raten von je 5,39 ‰, für 30000 Mk. Kaufsumme also 12 gleiche Raten von je 161,70 Mk. ergeben. Die Rente geht an die überlebende Schwester dann über mit dem Betrag 0,835 · 64,67 ‰ = 54,— ‰. Wenn man von der Rentenrate selbst ausgeht, erhält man einen Betrag von 0,835 · 161,70 Mk. = 135,02 Mk., also nur eine geringfügige Abweichung.

Aufgabe 97

Ein 45jähriger Mann schließt für sich und seine 40-jährige Frau eine Rentenversicherung ab. Die in vierteljährigen Raten von je 300 Mk. zu zahlende Rente soll zum ersten Male nach 10 Jahren fällig werden, vorausgesetzt, daß dann wenigstens entweder er selbst oder seine Frau noch am Leben ist. Die Rente soll dann unvermindert bis zum zweiten Tode weitergezahlt werden. Welche einmalige Einlage wäre zu zahlen und wie könnte die Prämienzahlung eingerichtet werden, wenn während der Aufschubsfrist laufende Jahresprämien ge-

zahlt werden sollen? Es ist angenommen, die Gesellschaft rechne mit der (nicht nach den Geschlechtern getrennten) Sächsischen Rentnersterbetafel zum Diskontsatz von $3\frac{1}{2}\%$. Gegeben seien demnach die folgenden Werte:

$$\begin{array}{lll} l_{40} = 7141 & D_{40} = 1803{,}6 & N_{40} = 32\,213 \\ l_{45} = 6812 & D_{45} = 1448{,}6 & N_{45} = 23\,930 \\ l_{50} = 6439 & D_{50} = 1152{,}9 & N_{50} = 17\,299 \\ l_{55} = 6000 & D_{55} = 904{,}55 & N_{55} = 12\,047{,}8 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} D_{40,45} = 122\,863 \cdot 10^2 & N_{40,45} = 173\,839 \cdot 10^3 \\ D_{50,55} = 69\,175 \cdot 10^2 & N_{50,55} = 76\,943 \cdot 10^3\,. \end{array}$$

Es sei angenommen, die Gesellschaft rechne bei einmaliger Einlage mit einem Aufschlage von 5% der Nettokaufsumme, bei laufender Prämie mit einem Aufschlage von 8% der Nettojahresprämie.

Die Formeln müssen hier besonders entwickelt werden.

Den Barwert der Versicherung bestimmt man in derselben Weise, wie es bei der sofort beginnenden Rente geschieht. Man fügt also die beiden Barwerte der einzelnen Versicherungen zusammen und zieht dann das davon ab, was in der Summe zuviel enthalten ist. Es ergibt sich ohne weiteres die Gleichung:

$$_{n|}a_{\overline{x,y}} = {}_{n|}a_x + {}_{n|}a_y - {}_{n|}a_{x,y}\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} _{n|}a_x &= {}_nE_x \cdot a_{x+n}\,, \\ _{n|}a_y &= {}_nE_y \cdot a_{y+n}\,, \\ _{n|}a_{x,y} &= {}_nE_{x,y} \cdot a_{x+n,\,y+n} \end{aligned}$$

zu setzen ist. Im vorliegenden Falle ergibt sich

$$_{10|}a_{45}^{(4)} = {}_{10}E_{45} \cdot [a_{55} - 0{,}375] = \frac{N_{55} - 0{,}375\,D_{55}}{D_{45}}\,,$$

$$_{10|}a_{40}^{(4)} = {}_{10}E_{40} \cdot [a_{50} - 0{,}375] = \frac{N_{50} - 0{,}375\,D_{50}}{D_{40}}\,,$$

$$_{10|}a_{40,45}^{(4)} = {}_{10}E_{40,45} \cdot [a_{50,55} - 0{,}375] = \frac{N_{50,55} - 0{,}375\,D_{50,55}}{D_{40,45}}\,.$$

$N_{55} = 12\,047{,}8$	$N_{50} = 17\,299$	$N_{50,55} = 76\,943 \cdot 10^3$
$\mu \cdot D_{55} = 339{,}2$	$\mu \cdot D_{50} = 432{,}(3)$	$\mu \cdot D_{50,55} = 2\,594 \cdot 10^3$
$\text{Diff.} = 11\,708{,}6$	$\text{Diff.} = 16\,866{,}(7)$	$\text{Diff.} = 74\,349 \cdot 10^3$
$D_{45} = 1\,448{,}6$	$D_{40} = 1\,803{,}6$	$D_{40,45} = 12\,286{,}(3) \cdot 10^3$
${}_{10\|}a^{(4)}_{45} = 8{,}0827$	${}_{10\|}a^{(4)}_{40} = 9{,}3517$	${}_{10\|}a^{(4)}_{40,45} = 6{,}0514$

$${}_{10|}a^{(4)}_{\overline{40,45}} = 11{,}3830$$

$$1{,}05 \cdot {}_{10|}a^{(4)}_{\overline{40,45}} = 11{,}9522 \qquad \underline{1195{,}25\,\%}\ .$$

Für 1200 Mk. Jahresrente wäre eine Kaufsumme von 14 343 Mk. festzusetzen.

Es sei hier besonders gewarnt vor einem naheliegenden Fehler! Da man die Barwerte aufgeschobener Renten gern als Produkte von Barwerten sofort beginnender Renten und diskontierten Lebenswahrscheinlichkeiten ausdrückt, läge es nahe, auch hier das Produkt zu bilden:

$${}_{n|}a_{\overline{x,y}} = {}_{n}E_{\overline{x,y}} \cdot a_{\overline{x+n,\,y+n}}\,,$$

wobei dann

$${}_{n}E_{\overline{x,y}} = {}_{n}E_{x} + {}_{n}E_{y} - {}_{n}E_{x,y} \qquad \text{und}$$

$$a_{\overline{x+n,\,y+n}} = a_{x+n} + a_{y+n} - a_{x+n,\,y+n}$$

zu setzen wäre, und wobei mit

$${}_{n}E_{\overline{x,y}} = v^{n}\left[\,{}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} - {}_{n}p_{x,y}\right]$$

ganz richtig die diskontierte Wahrscheinlichkeit dafür ausgedrückt wäre, daß nach n Jahren wenigstens eine der beiden Personen noch am Leben ist.

Der Fehler läge in der Verbindung zweier an sich richtiger Barwerte. Denn ${}_{n}E_{\overline{x,y}}$ enthält in sich die Möglichkeit, daß nach n Jahren nur noch eine der beiden Personen am Leben ist; der Ausdruck kann also nicht mit dem Barwert $a_{\overline{x+n,\,y+n}}$ verbunden werden, da dieser unter der Voraussetzung gilt, daß nach n Jahren zunächst beide Personen noch am Leben sind. Der falsche Barwert ${}_{n}E_{\overline{x,y}} \cdot a_{\overline{x+n,\,y+n}}$ wäre demnach zu groß. Da es

nützlich ist, sich die Wirkung eines solchen Fehlers zu veranschaulichen, sei der falsche Barwert berechnet!

$D_{55} = 904{,}55$	$D_{50} = 1152{,}9$	$D_{50,55} = 69\,175 \cdot 10^2$
$D_{45} = 1448{,}6$	$D_{40} = 1803{,}6$	$D_{40,45} = 122\,863 \cdot 10^2$
${}_{10}E_{45} = 0{,}62443$	${}_{10}E_{40} = 0{,}63922$	${}_{10}E_{40,45} = 0{,}56303$

$$ {}_{10}E_{\overline{40,45}} = \underline{0{,}70\,062}\;. $$

Zur Probe!

$$ {}_{10}p_{45} = \frac{l_{55}}{l_{45}} = 0{,}88\,080 $$

$$ {}_{10}p_{40} = \frac{l_{50}}{l_{40}} = 0{,}90\,169 $$

$$ \underline{{}_{10}p_{40,45} = {}_{10}p_{40} \cdot {}_{10}p_{45} = 0{,}79\,421} $$

$$ {}_{10}p_{\overline{40,45}} = 0{,}98\,828 $$

$$ v^{10} = 0{,}708\,919 $$

$$ {}_{10}E_{\overline{40,45}} = \underline{0{,}70\,061}\;. $$

Weiter ergäbe sich dann:

$N_{55} = 12\,047{,}8$	$N_{50} = 17\,299$	$N_{50,55} = 76\,943 \cdot 10^3$
$D_{55} = 904{,}55$	$D_{50} = 1\,152{,}9$	$D_{50,55} = 6\,917{,}5 \cdot 10^3$
$a_{55} = 13{,}319$	$a_{50} = 15{,}005$	$a_{50,55} = 11{,}123$
$\mu = 0{,}375$	$\mu = 0{,}375$	$\mu = 0{,}375$
$a_{55}^{(4)} = 12{,}944$	$a_{50}^{(4)} = 14{,}630$	$a_{50,55}^{(4)} = 10{,}748$

$$ a^{(4)}_{\overline{50,55}} = 16{,}826\;. $$

Statt dessen kann man auch folgendermaßen rechnen:

$$ \begin{aligned} a_{55} &= 13{,}319 \\ a_{50} &= 15{,}005 \\ \hline \text{Summe} &= 28{,}324 \\ a_{50,55} &= 11{,}123 \\ \hline a_{\overline{50,55}} &= 17{,}201 \\ \mu &= 0{,}375 \\ \hline a^{(4)}_{\overline{50,55}} &= 16{,}826\;. \end{aligned} $$

Alsdann ergibt sich der falsche Barwert

$$ {}_{10}E_{\overline{50,55}} \cdot a^{(4)}_{\overline{50,55}} = 11{,}789 \ , $$

der eine um mehr als 500 Mk. [etwa $3\frac{1}{2}$%] zu hohe Prämie zur Folge hätte.

Sollen laufende Prämien gezahlt werden, so ist Vorsicht geboten. Es ist dann zu bestimmen, was zu geschehen hat, wenn einer der Versicherten während der Aufschubsfrist sterben sollte.

Bestimmt man, daß die Prämienzahlung schon beim ersten Tode aufhören soll, so ist dagegen rechnerisch zwar nichts einzuwenden; es müßte aber der Nachweis erbracht werden, daß beide Antragsteller gute Lebenswagnisse sind. Andernfalls könnte es leicht geschehen, daß zum Beispiel ein schwerkranker Mann seiner gesunden Frau mit Hilfe einer solchen Versicherung ohne angemessene Gegenleistung eine Rente verschaffte.

Die Prämie wäre übrigens zu berechnen nach der Formel:

$$ {}_nP_{x,y} = \frac{{}_{n|}a_{\overline{x,y}}}{a_{x,y,\overline{n}|}} , $$

sodaß sich für das vorliegende Beispiel also die Gleichung

$$ {}_{10}P_{x,y} = \frac{{}_{10|}a^{(4)}_{\overline{40,45}}}{a_{40,45,\overline{10}|}} $$

ergäbe. Es wäre dann:

$$ \begin{aligned} N_{40,45} &= 173\,839 \cdot 10^3 \\ N_{50,55} &= 76\,943 \cdot 10^3 \\ \hline \text{Diff.} &= 96\,896 \cdot 10^3 \\ D_{40,45} &= 122\,86{,}3 \cdot 10^3 \\ a_{40,45,\overline{10}|} &= 7{,}8865 \\ {}_{10|}a^{(4)}_{\overline{40,45}} &= 11{,}3830 \\ {}_{10}P_{40,45} &= 1{,}4433(5) = h \\ 1{,}08 \cdot h = {}_{10}\mathfrak{P}_{40,45} &= 1{,}5588 \qquad \underline{\underline{155{,}90\,\%}} \ . \end{aligned} $$

Für 1200 Mk. Jahresrente wäre also eine Jahresprämie von 1870,80 Mk. festzusetzen, die bis zum ersten Tode, längstens jedoch 10 Jahre hindurch zu entrichten wäre.

Soll die Versicheiung ohne Rücksicht auf den Gesundheitszustand der Antragsteller abgeschlossen werden, so läge es nahe, die Prämien unvermindert bis zum zweiten Tode, längstens jedoch n Jahre hindurch entrichten zu lassen. Es hätte dann die Formel zu gelten:

$$ {}_nP_{\overline{x,y}} = \frac{{}_{n|}a_{\overline{x,y}}}{a_{\overline{x,y,n}|}} = \frac{{}_{n|}a_{\overline{x,y}}}{a_{x,\overline{n}|} + a_{y,\overline{n}|} - a_{x,y,\overline{n}|}}. $$

Für das vorliegende Beispiel erhielte man dann:

$$ {}_{10}P_{\overline{40,45}} = \frac{{}_{10|}a^{(4)}_{\overline{40,45}}}{a_{45,\overline{10}|} + a_{40,\overline{10}|} - a_{40,45,\overline{10}|}} $$

$$ {}_{10|}a^{(4)}_{\overline{40,45}} = 11{,}3830 $$

$$ a_{40,45,\overline{10}|} = 7{,}8865 $$

$N_{45} = 23\,930$	$N_{40} = 32\,213$
$N_{55} = 12\,047,(8)$	$N_{50} = 17\,299$
Diff. $= 11\,882,(2)$	Diff. $= 14\,914$
$D_{45} = 1\,448{,}6$	$D_{40} = 1\,803{,}6$
$a_{45,\overline{10}|} = 8{,}2025$	$a_{40,\overline{10}|} = 8{,}2690$

$$ a_{\overline{40,45},\overline{10}|} = 8{,}5850 $$

$$ {}_{10}P_{\overline{40,45}} = 1{,}3259 = h $$

$$ 1{,}08 \cdot h = {}_{10}\mathfrak{p}_{\overline{40,45}} = 1{,}4320 \qquad \underline{143{,}20\,\%}\,. $$

Es wäre also für 1200 Mk. Jahresrente eine Jahresprämie von 1718,40 Mk. festzusetzen.

In dieser Weise darf aber die Prämienzahlung nicht geregelt werden. Denn zunächst wäre eine solche Form der Versicherung wirtschaftlich unvorteilhaft, weil der überlebende Versicherte noch für ein Lebenswagnis mitzubezahlen hätte, das als solches gar nicht mehr in Frage käme. Stirbt zum Beispiel die mitversicherte Frau schon im ersten Jahre, so soll der Mann die volle Prämie von 1718,40 Mk., die doch für das gemeinschaft-

liche Wagnis berechnet ist, unvermindert weiterzahlen, obwohl die Frau als Lebensrisiko gar nicht mehr in Frage kommt. Der Mann käme dann aber billiger zu seiner Versicherung, wenn er die alte Versicherung fallen ließe und für sich allein eine neue Rentenversicherung mit noch 9jähriger Aufschubsfrist abschlösse. Denn dann ergäbe sich:

$$\begin{array}{rlcrl} N_{46} & = 22\,481 & \qquad & N_{55} & = 12\,047{,}8 \\ N_{55} & = \underline{12\,047{,}(8)} & & \mu \cdot D_{55} & = \underline{\quad 339{,}2} \\ \text{Diff.} & = 10\,433{,}(2) & & \text{Diff.} & = 11\,708{,}6 \end{array}$$

$$_9P_{46} = 1{,}1222(4)$$

$$_9\mathfrak{p}_{46} = 1{,}2120 \qquad \underline{121{,}20\,\%}\,.$$

Der Mann hätte dann also für sich allein nur eine Jahresprämie von 1454.40 Mk. aufzuwenden. Er hätte also allen Grund, die für ihn unvorteilhafte alte Versicherung aufzulösen.

So aber darf die Versicherung nicht eingerichtet sein. Denn die Prämie von 1718,40 Mk. könnte doch nur unter der Voraussetzung Geltung haben, daß sie auch dann noch gezahlt wird, wenn während der Aufschubsfrist eines der Wagnisse wegfällt. Besteht die Gefahr, daß in derartigen Fällen die Versicherung aufgelöst wird, so ist die festgesetzte Prämie unzureichend, weil die Gesellschaft sie nicht von allen den Versicherten erhalten wird, von denen sie sie rechnungsmäßig doch erhalten müßte.

Die Prämie darf also, wenn der Gesundheitszustand der Antragsteller nicht geprüft wird, weder beim ersten Tode ganz wegfallen, noch darf sie dann unvermindert weiterlaufen; sie muß sich also mit dem ersten Tode ermäßigen. Die Ermäßigung darf indes nicht willkürlicher Art sein; sie muß so beschaffen sein, daß die überlebende Person gerade die Prämie weiterzuzahlen hat, die ihrem eigenen Wagnis entspricht. Das ist, allgemein ausgedrückt, die Prämie:

$$\mathfrak{p} = \frac{_{n|}a_x}{a_{x,\overline{n}|}}[1+\beta].$$

Für die beiden Wagnisse zusammen ergibt sich also zunächst die Nettoprämie

$$\left[\frac{{}_{n|}a_x}{a_{x,\overline{n}|}} + \frac{{}_{n|}a_y}{a_{y,\overline{n}|}}\right].$$

Dafür wäre aber, wenn nach n Jahren beide noch am Leben sind, die doppelte Rente versichert. Es soll indes auch dann nur die einfache Rente gezahlt werden. Folglich ist die Prämie noch zu ermäßigen. Bezeichnet man die bei Lebzeiten beider zu zahlende Nettojahresprämie schlechthin mit P_0, den noch zu bestimmenden an den beiden Einzelprämien abzuziehenden Betrag mit P_3, und setzt man

$$\frac{{}_{n|}a_x}{a_{x,\overline{n}|}} = P_1\,, \quad \frac{{}_{n|}a_y}{a_{y,\overline{n}|}} = P_2\,,$$

so gilt also die Gleichung:

$$P_0 = P_1 + P_2 - P_3\,.$$

Es kommt nun darauf an, den Wert P_3 richtig zu bestimmen. Das geschieht am einfachsten nach dem Grundsatz der Gleichheit von Leistung und Gegenleistung. Die Gesellschaft räumt den Versicherten, solange sie beide am Leben sind, die Ermäßigung P_3 ein; das heißt: sie gewährt ihnen eine Rente im Betrage P_3. Im Zeitpunkt des Abschlusses der Versicherung weist diese Leistung den Barwert $P_3 \cdot a_{x,y,\overline{n}|}$ auf. Die Gegenleistung besteht darin, daß die Versicherten, wenn sie nach n Jahren beide noch am Leben sind, auf die Doppelauszahlung verzichten, die ihnen zustünde, wenn sie einfach die Prämie $(P_1 + P_2)$ gezahlt hätten. Diese Gegenleistung hat den Barwert ${}_{n|}a_{x,y}$. Es muß nun also sein:

$$P_3 \cdot a_{x,y,\overline{n}|} = {}_{n|}a_{x,y}\,,$$

und somit ergibt sich:

$$P_3 = \frac{{}_{n|}a_{x,y}}{a_{x,y,\overline{n}|}}.$$

Für das vorliegende Beispiel erhält man also:

$$_{10|}a_{45}^{(4)} = 8{,}0827 \qquad _{10|}a_{40}^{(4)} = 9{,}3517$$
$$a_{45,\overline{10}|} = 8{,}2025 \qquad a_{40,\overline{10}|} = 8{,}2690$$
$$P_1 = 0{,}98\,539(5) \qquad P_2 = 1{,}13\,093(5)$$
$$(P_1 + P_2) = 2{,}11\,633$$
$$_{10|}a_{40,45}^{(4)} = 6{,}0514$$
$$a_{40,45,\overline{10}|} = 7{,}8865$$
$$P_3 = 0{,}76\,731$$
$$P_0 = 1{,}34\,902$$
$$1{,}08 \cdot P_0 = \mathfrak{p}_0 = 1{,}45\,694 \qquad \underline{145{,}70\,\%}\,.$$

Für 1200 Mk. Jahresrente ist also zunächst eine Jahresprämie von 1748,40 Mk. zu zahlen. Stirbt dann während der Aufschubsfrist der Mann, so ermäßigt sich die Prämie von selbst auf 1465,80 Mk.; stirbt die Frau, so ermäßigt sich die Prämie auf 1277.40 Mk. Denn es ist dann:

$$\mathfrak{p}_2 = 1{,}08 \cdot P_2 = 1{,}22\,141\,, \qquad \underline{122{,}15\,\%}\,,$$
$$\mathfrak{p}_1 = 1{,}08 \cdot P_1 = 1{,}06\,423\,, \qquad \underline{106{,}45\,\%}\,.$$

Daß nur diese Art der Berechnung richtig ist, kann man leicht nachweisen. Es muß sich nämlich mit Hilfe der gefundenen Prämienbeträge von selbst der richtige Rentenbarwert ergeben, der die Minderung der Prämie ausdrückt. Die Anfangsprämie P_0 ermäßigt sich doch beim Ableben des einen oder des anderen Versicherten auf den Betrag P_1 oder P_2; es handelt sich also um eine veränderliche Prämie. Demzufolge muß die Gleichung

$$P_0 = \frac{_{n|}a_{\overline{x,y}}}{a^{>}_{x,y,\overline{n}|}}$$

Geltung haben, wobei

$$a^{>}_{x,y,\overline{n}|} = \varepsilon_1 \cdot a_{x,\overline{n}|} + \varepsilon_2 \cdot a_{y,\overline{n}|} - [\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1] \cdot a_{x,y,\overline{n}|}$$

zu setzen ist.

Denn dieser Barwert, der weiter nichts ist als die allgemeine Form der Rentenformel

$$a_{\overline{x,y}}^{\varepsilon} = \varepsilon \cdot a_x + \varepsilon \cdot a_y - (2\varepsilon - 1)\, a_{x,y},$$

drückt aus, daß bei Lebzeiten beider Versicherten der Betrag 1, vom ersten Tode an aber nur noch der Betrag ε_1 oder ε_2 zu zahlen ist.

Dabei ist natürlich:

$$\varepsilon_1 = \frac{P_1}{P_0}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{P_2}{P_0}.$$

Im vorliegenden Falle erhält man:

$$\varepsilon_1 = \frac{0{,}98\,539\,(5)}{1{,}34\,902} = 0{,}73\,045,$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1{,}13\,093\,(5)}{1{,}34\,902} = 0{,}83\,834.$$

Die Werte ε können auch aus den Bruttoprämien berechnet werden, wenn diese mit gleichartigen Zuschlägen versehen sind.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 0{,}73\,045 \\
\varepsilon_2 &= 0{,}83\,834 \\
\hline
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 &= 1{,}56\,879 \\
\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 1 &= 0{,}56\,879 = \eta \\
\varepsilon_1 \cdot a_{45,\overline{10}|} &= 5{,}9915 \\
\varepsilon_2 \cdot a_{40,\overline{10}|} &= 6{,}9322 \\
\hline
\text{Summe} &= 12{,}9237 \\
\eta \cdot a_{40,45,\overline{10}|} &= 4{,}4857 \\
\hline
\text{Diff.} = a^{>}_{40,45,\overline{10}|} &= 8{,}4380 \\
{}_{10|}a^{(4)}_{40,45} &= 11{,}3830 \\
P_0 &= 1{,}34\,902\,.
\end{aligned}$$

Da sich auf diesem Wege von selbst wieder dieselbe Anfangsprämie ergibt, die vorher berechnet war, so müssen die Werte von ε_1 und ε_2 richtig gewesen sein; also muß auch P_0 selbst richtig berechnet sein.

Aufgabe 98

Ein 28jähriger Mann schließt zu Gunsten seiner 23-jährigen Frau eine Witwenrentenversicherung ab, aus der die Frau, wenn sie ihn überleben sollte, bis zu ihrem Ableben eine Jahresrente von 1500 Mk. erhalten soll. Welche Prämie hat er zu zahlen, wenn bestimmt wird, daß die Prämie entweder bis zum ersten Tode, oder wenn bestimmt wird, daß sie bis zum ersten Tode, längstens jedoch 25 Jahre hindurch entrichtet werden soll? Die Gesellschaft rechnet mit einem einmaligen Aufschlage von 30 Mk. für 100 Mk. Jahresrente und mit einem laufenden Zuschlag von 5% der Bruttoprämie. Für die Nettorechnung sollen dabei die folgenden Werte gelten:

$$\left.\begin{aligned} N_{23} &= 77\,771 \\ D_{23} &= 3\,637{,}2 \end{aligned}\right\} \quad \left[\begin{array}{c}\text{Sächsische Rentnersterbetafel,}\\ 3^{1}/_{2}\,\%\ \text{Diskont}\end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{N}_{23,28} &= 5\,189\,750 \cdot 10^4 \\ \bar{N}_{48,53} &= 823\,527 \cdot 10^4 \\ \bar{D}_{23,28} &= 305\,410 \cdot 10^4 \end{aligned}\right\} \quad \left[\begin{array}{c}\text{Tafel der 17 englischen}\\ \text{Gesellschaften. } 3^{1}/_{2}\,\%\ \text{Dis-}\\ \text{kont.}\end{array}\right]$$

[Formeln (171) bis (175)].

$$\begin{aligned} N_{23} &= 77\,771 \\ D_{23} &= 3\,637{,}2 \\ a_{23} &= 21{,}382 \\ \bar{N}_{23,28} &= 5\,189\,750 \cdot 10^4 \\ \bar{D}_{23,28} &= 305\,410 \cdot 10^4 \\ a_{23,28} &= 16{,}993 \\ \mathfrak{a}_{23} &= 20{,}382 \\ \underline{\mathfrak{a}_{23,28}} &= \underline{15{,}993} \\ \text{Diff.} = \mathfrak{a}_{\overline{23},28} &= 4{,}389\,. \end{aligned}$$

[Man beachte die Größenordnung des Barwertes!]

$$\beta = 0{,}300$$

$$\mathfrak{A}_{\overline{23},28} = 4{,}689 \qquad \underline{469\,\%\,.}$$

Für 1500 Mk. Jahresrente wäre eine einmalige Einlage von 7035 Mk. einzuzahlen.

$$a_{\overline{23},28} + \beta = 4{,}689$$
$$a_{23,28} = 16{,}993$$
$$\text{Quotient} = 0{,}27\,594 = h_1$$
$$\frac{h}{0{,}95} = {}^{a}p_{\overline{23},28} = 0{,}29\,046 \qquad \underline{29{,}10\,\%}\,.$$

Da laufende Prämien gezahlt werden sollen, ist für 1500 Mk. Jahresrente eine Prämie von 436,50 Mk. festzusetzen, wenn die Prämie unbedingt bis zum ersten Tode gezahlt werden soll.

Zur Probe!

$$a_{23} + \beta = 21{,}682$$
$$a_{23,28} = 16{,}993$$
$$\text{Quotient} = 1{,}27\,594 = h_2$$
$$(h_2 - 1) = 0{,}27\,594 = h_1 \text{ (wie oben)}.$$

Soll die Prämienzahlungsdauer abgekürzt werden, so ergibt sich:

$$\overline{N}_{23,28} = 5\,189\,750 \cdot 10^4$$
$$\overline{N}_{48,53} = 823\,527 \cdot 10^4$$
$$\text{Diff.} = 4\,366\,223 \cdot 10^4$$
$$\overline{D}_{23,28} = 305\,410 \cdot 10^4$$
$$a_{23,28,\overline{25}|} = 14{,}296$$
$$a_{\overline{23},28} + \beta = 4{,}689$$
$$\text{Quotient} = 0{,}32\,799(4) = h_3$$
$$\frac{h_3}{0{,}95} = {}_{25}^{a}p_{\overline{23},28} = 0{,}34\,526 \qquad \underline{34{,}60\,\%}\,.$$

Die Jahresprämie erhöht sich dann also auf 519,— Mk. für 1500 Mk. Jahresrente.

Eine in dieser Weise mit getrennten Sterbetafeln berechnete Prämie kann als vorsichtig bemessen gelten; sie wird im allgemeinen also für eine Versicherung mit Gewinnbeteiligung zugrunde zu legen sein.

Aufgabe 99

Zwei Geschäftsteilhaber, die beide 40 Jahre alt sind, schließen zu Gunsten des überlebenden Teilhabers eine gegenseitige Todesfallversicherung ab. Die Versicherungssumme wird auf 200 000 Mk. festgesetzt. Die Prämienzahlung soll auf 20 Jahre begrenzt werden. Die Gesellschaft rechnet mit einem einmaligen Aufschlage von 20 $^0/_{00}$ der Versicherungssumme und mit einem Zuschlag von 8 $^0/_0$ der Bruttoprämie. Für die Nettorechnung gelten die folgenden Grundzahlen:

$$\left.\begin{aligned} N_{40,40} &= 2\,178\,894 \cdot 10^4 \\ N_{60,60} &= 314\,905 \cdot 10^4 \\ D_{40,40} &= 156\,250 \cdot 10^4 \end{aligned}\right\}$$

[Tafel der 17 englischen Gesellschaften, 3½ % Diskont.]

Welche feste Jahresprämie ist zu entrichten? [Formel ($180\frac{b}{}$)].

$$\begin{aligned} N_{40,40} &= 2\,178\,894 \cdot 10^4 \\ D_{40,40} &= 156\,250 \cdot 10^4 \\ a_{40,40} &= 13{,}9449\,(2) \\ d &= 0{,}033\,816\,425 \\ d \cdot a_{40,40} &= 0{,}471\,567 = h \\ (1 - h) = A_{40,40} &= 0{,}528\,433 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{40,40} &= 2\,178\,894 \cdot 10^4 \\ N_{60,60} &= 314\,905 \cdot 10^4 \\ \hline \text{Diff.} &= 1\,863\,989 \cdot 10^4 \\ D_{40,40} &= 156\,250 \cdot 10^4 \\ a_{40,40,\overline{20|}} &= 11{,}9295\,(3) \\ A_{40,40} + \alpha &= 548{,}433\,^0/_{00} \\ {}_{20}\overset{z}{P}_{40,40} &= 45{,}9727 = h \\ \frac{h}{0{,}92} = {}_{20}\mathfrak{p}_{40,40} &= 49{,}9703 \qquad \underline{50{,}-\,^0/_{00}}\,. \end{aligned}$$

Die Jahresprämie macht genau <u>10 000 Mk.</u> für 200 000 Mark Versicherungssumme aus. Wenn also nach 20 Jahren beide Teilhaber noch am Leben sein sollten, so haben sie an Prämien gerade genau den Betrag des versicherten Kapitals eingezahlt. Die Versicherung läuft

dann als prämienfreie Versicherung weiter. Die Teilhaber können im vorliegenden Falle gegenseitig auf den Todesfall versichert werden, wenn sie auf die Zinsen ihrer Einlagen Verzicht leisten.

Aufgabe 100

Die in dem Beispiel der vorigen Aufgabe behandelte Versicherung sei nicht zur Prämie von 50‰ ohne Gewinnbeteiligung, sondern zu einer erhöhten Prämie von 55‰ mit Beteiligung am Geschäftsgewinn abgeschlossen. Nach 10 Jahren entschließen sich die Teilhaber, die Versicherung in eine gemischte Versicherung umwandeln zu lassen derart, daß die versicherte Summe nach weiteren 10 Jahren endgültig fällig werden soll. Die Umwandlung soll in der Weise bewirkt werden, daß auf den Lebensfall eine Zusatzversicherung zu festen Prämien abgeschlossen wird. Die bereits bestehende Grundversicherung soll also ungeändert weiterlaufen, schon der Gewinnbeteiligung wegen, die durch die Änderung nicht gestört werden soll. Die Gesellschaft rechnet für die Zusatzprämie mit einem Aufschlag von 5% des Bruttowertes. Würde die Versicherung einfach nach 20 Jahren, also mit dem Ablauf der bedungenen Prämienzahlungsdauer aufgelöst werden, so hätte die Gesellschaft 90% des Deckungskapitals als Rückkaufswert zu erstatten. Für die Nettorechnung gelten übrigens noch die folgenden weiteren Werte:

$$\left.\begin{aligned} D_{60,60} &= 39\,769 \cdot 10^4 \\ N_{50,50} &= 953\,784 \cdot 10^4 \end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{c}\text{Tafel der 17 engl. Gesell-}\\ \text{schaften, } 3\tfrac{1}{2}\,\%\text{ Diskont.}\end{array}\right]$$

Welche feste Zusatzprämie ist während der zweiten Hälfte der bedungenen Prämienzahlungsdauer zu entrichten, wenn die Gesellschaft zugesteht, daß für diesen besonderen Fall der Rückkaufswert der Grundversicherung am Schlusse des 20. Versicherungsjahres zum Satz von 95% berechnet werden soll? [Formel (180)].

Die Grundversicherung läuft ungeändert weiter. Wenn die Prämienzahlungsdauer abläuft, wird die Grundversicherung aufgelöst. Die Gesellschaft kann dann zwar nicht das volle Deckungskapital hergeben; sie kann aber den Rückkaufswert erhöhen. Man rechnet da vielfach mit dem arithmetischen Mittel zwischen Rückkaufspreis und Deckungskapital.

Die Berechnung gestaltet sich dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned} N_{60,60} &= 314\,905 \cdot 10^4 \\ D_{60,60} &= \;\;39\,769 \cdot 10^4 \\ a_{60,60} &= 7{,}918\,35 \\ d \cdot a_{60,60} &= 0{,}267\,770 \\ A_{60,60} &= 0{,}732\,230 \qquad \underline{732{,}23\,^0/_{00}}. \end{aligned}$$

Das Deckungskapital beläuft sich auf $\underline{732{,}23\,^0/_{00}}$. Davon sollen für die abgeänderte Versicherung 95% als Abfindungssumme erstattet werden, wenn die Versicherten nach jenen 10 Jahren noch am Leben sind. Es ergibt sich also ein Abfindungswert von $\underline{695{,}62\,^0/_{00}}$. Damit alsdann aber im ganzen gerade der Betrag der Versicherungssumme ausgezahlt werden kann, muß der Rest von $\underline{304{,}38\,^0/_{00}}$ in einer Lebensfallversicherung aufgebracht werden. Bezeichnet man den Rest der Summe mit ϱ, so ist die gesuchte Zusatzprämie:

$$\mathfrak{ZP} = 1{,}0526316 \cdot \varrho \cdot \frac{D_{60,60}}{N_{50\,50} - N_{60,60}},$$

wobei dann $\frac{1}{0{,}95} = 1{,}052\,6316$ gesetzt ist. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} N_{50,50} &= 953\,784 \cdot 10^4 \\ N_{60,60} &= 314\,905 \cdot 10^4 \\ \hline \text{Diff.} &= 638\,879 \cdot 10^4 \\ D_{60,60} &= \;\;39\,769 \cdot 10^4 \\ \text{Quotient} &= 0{,}062\,248 = h \\ \varrho &= 0{,}304\,38 \\ \varrho \cdot h &= 0{,}018\,947 \\ \mathfrak{ZP} &= 0{,}019\,944 \qquad \underline{20{,}\text{—}\,^0/_{00}}. \end{aligned}$$

Für 200 000 Mk. Versicherungssumme ist also in den letzten 10 Jahren noch eine feste Zusatzprämie von 4000 Mk. zu zahlen. In derselben Weise könnte natürlich auch die Versicherung ohne Gewinnbeteiligung ergänzt werden. Man darf nur nicht vergessen, daß man selbst ausgewählten Wagnissen eine Lebensfallversicherung zugesteht, deren Prämien mit einer Todesfalltafel ermittelt. sind. Aus diesem Grunde darf man das Deckungskapital nicht voll zur Bemessung der Restsumme anrechnen.

Anmerkung: Die in der vorigen Aufgabe berechnete Prämie kann für eine gleichartige Versicherung auch Geltung haben, wenn zwei nicht gleichaltrige Teilhaber die Versicherung eingehen, wenn aber das „Zwischenalter" von 40 Jahren zugrunde zu legen ist. Wann ist das der Fall? Berechnet die Gesellschaft das Zwischenalter beispielsweise nach der Formel:

$$z = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y, \quad x > y,$$

so ergibt sich ohne weiteres die „diophantische" Gleichung:

$$y = 4z - 3x,$$

im vorliegenden Falle also die Gleichung:

$$y = 160 - 3x.$$

Sie liefert, wenn man nur ganzzahlige Werte benutzt, die Wertpaare:

$x = 40$	$y = 40$
$x = 41$	$y = 37$
$x = 42$	$y = 34$
$x = 43$	$y = 31$
$x = 44$	$y = 28$
$x = 45$	$y = 25$
$x = 46$	$y = 22$.

Weiter aber entsteht alsdann die technisch wichtige Frage, ob für diese Alter dann auch die in der vorlie-

genden Aufgabe berechneten Umwandlungszahlen Geltung haben. Die Frage ist zu bejahen. Denn nach m Jahren berechnet sich nach der obigen Formel das Zwischenalter auf

$$\frac{3}{4}\cdot(x+m)+\frac{1}{4}\cdot(y+m)=\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right)+\left(\frac{3}{4}m+\frac{1}{4}m\right)=z+m.$$

Wie leicht einzusehen ist, gilt das auch dann, wenn die Faktoren der beiden einzelnen Alter (die Summe der Faktoren muß gleich 1 sein!) nicht gerade $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$ sind. Gerade darum ist es für das praktische Rechnen so vorteilhaft, von einem „Zwischenalter" auszugehen und sich dabei einer Formel von der Art zu bedienen, wie sie hier zugrunde gelegt ist.

Tafel der Summenbarwerte v^n.

Anzahl der Jahre	3 %	3 1/2 %	3 3/4 %	4 %	4 1/4 %	4 1/2 %	5 %
n							
1	0,970874	0,966184	0,963855	0,961538	0,959233	0,956938	0,952381
2	0,942596	0,933511	0,929017	0,924556	0,920127	0,915730	0,907029
3	0,915142	0,901943	0,895438	0,888996	0,882616	0,876297	0,863838
4	0,888487	0,871442	0,863073	0,854804	0,846634	0,838561	0,822702
5	0,862609	0,841973	0,831878	0,821927	0,812119	0,802451	0,783526
6	0,837484	0,813501	0,801810	0,790315	0,779011	0,767896	0,746215
7	0,813092	0,785991	0,772829	0,759918	0,747253	0,734828	0,710681
8	0,789409	0,759412	0,744895	0,730690	0,716789	0,703185	0,676839
9	0,766417	0,733731	0,717971	0,702587	0,687568	0,672904	0,644609
10	0,744094	0,708919	0,692020	0,675564	0,659537	0,643928	0,613913
11	0,722421	0,684946	0,667008	0,649581	0,632650	0,616199	0,584679
12	0,701380	0,661783	0,642899	0,624597	0,606858	0,589664	0,556837
13	0,680951	0,639404	0,619662	0,600574	0,582118	0,564272	0,530321
14	0,661118	0,617782	0,597264	0,577475	0,558387	0,539973	0,505068
15	0,641862	0,596891	0,575676	0,555265	0,535623	0,516720	0,481017
16	0,623167	0,576706	0,554869	0,533908	0,513787	0,494469	0,458112
17	0,605016	0,557204	0,534813	0,513373	0,492841	0,473176	0,436297
18	0,587395	0,538361	0,515483	0,493628	0,472749	0,452800	0,415521
19	0,570286	0,520156	0,496851	0,474642	0,453477	0,433302	0,395734
20	0,553676	0,502566	0,478892	0,456387	0,434989	0,414643	0,376889
21	0,537549	0,485571	0,461583	0,438834	0,417256	0,396787	0,358942
22	0,521893	0,469151	0,444899	0,421955	0,400246	0,379701	0,341850
23	0,506692	0,453286	0,428819	0,405726	0,383929	0,363350	0,325571
24	0,491934	0,437957	0,413319	0,390121	0,368277	0,347703	0,310068
25	0,477606	0,423147	0,398380	0,375117	0,353263	0,332731	0,295303
26	0,463695	0,408838	0,383981	0,360689	0,338862	0,318402	0,281241
27	0,450189	0,395012	0,370102	0,346817	0,325047	0,304691	0,267848
28	0,437077	0,381654	0,356725	0,333477	0,311796	0,291571	0,255094
29	0,424346	0,368748	0,343831	0,320651	0,299085	0,279015	0,242946
30	0,411987	0,356278	0,331403	0,308319	0,286892	0,267000	0,231377
31	0,399987	0,344230	0,319425	0,296460	0,275196	0,255502	0,220359
32	0,388337	0,332590	0,307879	0,285058	0,263977	0,244500	0,209866
33	0,377026	0,321343	0,296751	0,274094	0,253215	0,233971	0,199873
34	0,366045	0,310476	0,286025	0,263552	0,242892	0,223896	0,190355
35	0,355383	0,299977	0,275687	0,253415	0,232990	0,214254	0,181290
36	0,345032	0,289833	0,265722	0,243669	0,223492	0,205028	0,172657
37	0,334983	0,280032	0,256118	0,234297	0,214381	0,196199	0,164436
38	0,325226	0,270562	0,246861	0,225285	0,205641	0,187750	0,156605
39	0,315754	0,261413	0,237938	0,216621	0,197257	0,179665	0,149148
40	0,306557	0,252572	0,229338	0,208289	0,189216	0,171929	0,142046
41	0,297628	0,244031	0,221049	0,200278	0,181502	0,164525	0,135282
42	0,288959	0,235779	0,213059	0,192575	0,174103	0,157440	9,128840
43	0,280543	0,227806	0,205358	0,185168	0,167005	0,150661	0,122704
44	0,272372	0,220102	0,197935	0,178046	0,160197	0,144173	0,116861
45	0,264439	0,212659	0,190781	0,171198	0,153666	0,137964	0,111297
46	0,256737	0,205468	0,183885	0,164614	0,147401	0,132023	0,105997
47	0,249259	0,198520	0,177239	0,158283	0,141392	0,126338	0,100949
48	0,241999	0,191806	0,170833	0,152195	0,135628	0,120898	0,096142
49	0,234950	0,185320	0,164658	0,146341	0,130099	0,115692	0,091564
50	0,228107	0,179053	0,158707	0,140713	0,124795	0,110710	0,087204

Tafel der Summenendwerte $(1+i)^n$.

Anzahl der Jahre n	3%	3½%	3¾%	4%	4¼%	4½%	5%
1	1,030000	1,035000	1,037500	1,040000	1,042500	1,045000	1,050000
2	1,060900	1,071225	1,076406	1,081600	1,086806	1,092025	1,102500
3	1,092727	1,108718	1,116771	1,124864	1,132996	1,141166	1,157625
4	1,125509	1,147523	1,158650	1,169859	1,181148	1,192519	1,215506
5	1,159274	1,187686	1,202100	1,216653	1,231347	1,246182	1,276282
6	1,194052	1,229255	1,247179	1,265319	1,283679	1,302260	1,340096
7	1,229874	1,272279	1,293948	1,315932	1,338235	1,360862	1,407100
8	1,266770	1,316809	1,342471	1,368569	1,395110	1,422101	1,477455
9	1,304773	1,362897	1,392813	1,423312	1,454402	1,486095	1,551328
10	1,343916	1,410599	1,445044	1,480244	1,516214	1,552969	1,628895
11	1,384234	1,459970	1,499233	1,539454	1,580654	1,622853	1,710339
12	1,425761	1,511069	1,555454	1,601032	1,647831	1,695881	1,795856
13	1,468534	1,563956	1,613784	1,665074	1,717864	1,772196	1,885649
14	1,512590	1,618695	1,674301	1,731676	1,790873	1,851945	1,979932
15	1,557967	1,675349	1,737087	1,800944	1,866986	1,935282	2,078928
16	1,604706	1,733986	1,802228	1,872981	1,946332	2,022370	2,182875
17	1,652848	1,794676	1,869811	1,947900	2,029052	2,113377	2,292018
18	1,702433	1,857489	1,939929	2,025817	2,115286	2,208479	2,406619
19	1,753506	1,922501	2,012677	2,106849	2,205186	2,307860	2,526950
20	1,806111	1,989789	2,088152	2,191123	2,298906	2,411714	2,653298
21	1,860295	2,059431	2,166458	2,278768	2,396610	2,520241	2,785963
22	1,916103	2,131512	2,247700	2,369919	2,498466	2,633652	2,925261
23	1,973587	2,206114	2,331989	2,464716	2,604651	2,752166	3,071524
24	2,032794	2,283328	2,419438	2,563304	2,715348	2,876014	3,225100
25	2,093778	2,363245	2,510167	2,665836	2,830750	3,005434	3,386355
26	2,156591	2,445959	2,604298	2,772470	2,951057	3,140679	3,555673
27	2,221289	2,531567	2,701960	2,883369	3,076477	3,282010	3,733456
28	2,287928	2,620172	2,803283	2,998703	3,207228	3,429700	3,920129
29	2,356566	2,711878	2,908406	3,118651	3,343535	3,584036	4,116136
30	2,427262	2,806794	3,017471	3,243398	3,485635	3,745318	4,321942
31	2,500080	2,905031	3,130627	3,373133	3,633775	3,913857	4,538039
32	2,575083	3,006708	3,248025	3,508059	3,788210	4,089981	4,764941
33	2,652335	3,111942	3,369826	3,648381	3,949209	4,274030	5,003189
34	2,731905	3,220860	3,496194	3,794316	4,117050	4,466362	5,253348
35	2,813862	3,333590	3,627302	3,946089	4,292025	4,667348	5,516015
36	2,898278	3,450266	3,763326	4,103933	4,454436	4,877378	5,791816
37	2,985227	3,571025	3,904450	4,268090	4,664599	5,096860	6,081407
38	3,074783	3,696011	4,050867	4,438813	4,862845	5,326219	6,385477
39	3,167027	3,825372	4,202775	4,616366	5,069516	5,565899	6,704751
40	3,262038	3,959260	4,360379	4,801021	5,284970	5,816365	7,039989
41	3,359899	4,097834	4,523893	4,993061	5,509581	6,078101	7,391988
42	3,460696	4,241258	4,693539	5,192784	5,743739	6,351615	7,761588
43	3,564517	4,389702	4,869547	5,400495	5,987848	6,637438	8,149667
44	3,671452	4,543342	5,052155	5,616515	6,242331	6,936123	8,557150
45	3,781596	4,702359	5,241610	5,841176	6,507630	7,248248	8,985008
46	3,895044	4,866941	5,438171	6,074823	6,784204	7,574420	9 434258
47	4,011895	5,037284	5.642102	6,317816	7,072533	7,915268	9,905971
48	4,132252	5,213589	5,853681	6,570528	7,373116	8,271456	10,401270
49	4,256219	5,396065	6,073194	6,833319	7,686473	8,643671	10,921333
50	4,383906	5,584927	6,300939	7,106683	8,013148	9,032636	11,467400

Tafel der Rentenbarwerte $a_{\overline{n|}}$.

Anzahl der Jahre n	3%	$3\frac{1}{2}\%$	$3\frac{3}{4}\%$	4%	$4\frac{1}{4}\%$	$4\frac{1}{2}\%$	5%
1	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
2	1,970874	1,966184	1,963855	1,961538	1,959233	1,956938	1,952381
3	2,913470	2,899694	2,892873	2,886095	2,879360	2,872668	2,859410
4	3,828611	3,801637	3,788311	3,775091	3,761976	3,748964	3,723248
5	4,717098	4,673079	4,651384	4,629895	4,608610	4,587526	4,545951
6	5,579707	5,515052	5,483262	5,451822	5,420729	5,389977	5,329477
7	6,417191	6,328553	6,285072	6,242137	6,199740	6,157872	6,075692
8	7,230283	7,114544	7,057900	7,002055	6,946993	6,892701	6,786373
9	8,019692	7,873956	7,802796	7,732745	7,663782	7,595886	7,463213
10	8,786109	8,607687	8,520767	8,435332	8,351350	8,268790	8.107822
11	9,530208	9,316605	9,212787	9,110896	9,010887	8,912718	8,721735
12	10,252624	10,001551	9,879795	9,760477	9,643567	9,528917	9,306414
13	10,954004	10,663334	10,522694	10,385074	10,250395	10,118581	9,863252
14	11,634955	11,302738	11,142356	10,985648	10,832513	10,682852	10,393573
15	12,296073	11,920520	11,739620	11,563123	11,390900	11,222825	10,898641
16	12,937935	12,517411	12,315296	12,118387	11,926523	11,739546	11,379658
17	13,561102	13,094117	12,870165	12,652296	12,440309	12,234015	11,837770
18	14,166118	13,651321	13,404978	13,165669	12,933151	12,707191	12,274066
19	14,753513	14,189682	13,920461	13,659297	13,405900	13,159992	12,689587
20	15,323799	14,709837	14,417312	14,133939	13,859376	13,593294	13,085321
21	15,877475	15,212403	14,896204	14,590326	14,294366	14,007936	13,462210
22	16,415024	15,697974	15,357787	15,029160	14,711622	14,404724	13,821153
23	16,936917	16,167125	15,802686	15,451115	15,111868	14,784425	14,163003
24	17,443608	16,620410	16,231505	15,856842	15,495796	15,147775	14,488574
25	17,935542	17,058368	16,644824	16,246963	15,864073	15.495478	14,798642
26	18,413148	17,481515	17,043204	16,622080	16,217336	15,828209	15,093945
27	18,876842	17,890352	17,427185	16,982769	16,556198	16,146611	15,375185
28	19,327031	18,285365	17,797286	17,329586	16,881245	16,451303	15,643034
29	19,764108	18,667019	18,154011	17,663063	17,193041	16,742874	15,898127
30	20,188455	19,035767	18,497842	17,983715	17,492125	17,021889	16,141074
31	20,600441	19,392045	18,829245	18,292033	17,779017	17,288889	16,372451
32	21,000428	19,736276	19,148670	18,588493	18,054213	17,544391	16,592811
33	21,388766	20,068865	19,456549	18,873551	18,318190	17,788891	16,802677
34	21,765792	20,390208	19,753301	19,147646	18,571405	18.022862	17,002549
35	22,131837	20,700684	20,039326	19,411198	18,814298	18.246758	17,192904
36	22,487220	21,000661	20,315013	19,664613	19,047288	18,461012	17,374194
37	22,832252	21,290494	20,580735	19,908282	19,270780	18,666041	17,546852
38	23,167235	21,570525	20,836853	20,142579	19,485160	18,862240	17,711287
39	23,492462	21,841087	21,083714	20,367864	19,690801	19,049990	17,867893
40	23,808215	22,102500	21,321652	20,584485	19,888059	19,229656	18,017041
41	24,114772	22,355072	21,550990	20,792774	20,077275	19,401584	18,159086
42	24,412400	22,599104	21,772039	20,993052	20,258777	19,566109	18,294368
43	24,701359	22,834883	21,985097	21,185627	20,432879	19,723550	18,423208
44	24,981902	23,062689	22,190455	21,370795	20,599884	19,874210	18,545912
45	25,254274	23,282791	22,388391	21,548841	20,760081	20,018383	18,662773
46	25,518712	23,495450	22,579172	21,720040	20,913747	20,156347	18,774070
47	25,775449	23,700918	22,763057	21,884654	21,061148	20,288371	18,880066
48	26,024708	23,899438	22,940296	22,042936	21,202540	20,414709	18,981016
49	26.266707	24,091244	23,111129	22,195131	21,338168	20,535607	19,077158
50	26,501657	24,276564	23,275787	22,341472	21,468266	20,651298	19,168722

Tafel der Rentenendwerte $r_{\overline{n}|}$.

Anz. d. Jahre n	3%	3½%	3¾%	4%	4¼%	4½%	5%
1	1,030000	1,035000	1,037500	1,040000	1,042500	1,045000	1,050000
2	2,090900	2,106225	2,113906	2,121600	2,129306	2,137025	2,152500
3	3,183627	3,214943	3,230678	3,246464	3,262302	3,278191	3,310125
4	4,309136	4,362466	4,389328	4,416323	4,443450	4,470710	4,525631
5	5,468410	5,550152	5,591428	5,632975	5,674796	5,716892	5,801913
6	6,662462	6,779408	6,838607	6,898294	6,958475	7,019152	7,142008
7	7,892336	8,051687	8,132554	8,214226	8,296710	8,380014	8,549109
8	9,159106	9,368496	9,475025	9,582795	9,691820	9,802114	10,026564
9	10,463879	10,731393	10,867838	11,006107	11,146223	11,288209	11,577893
10	11,807796	12,141992	12,312882	12,486351	12,662437	12,841179	13,206787
11	13,192030	13,601962	13,812116	14,025805	14,243091	14,464032	14,917127
12	14,617790	15,113030	15,367570	15,626838	15,890922	16,159913	16,712983
13	16,086324	16,676986	16,981354	17,291911	17,608786	17,932109	18,598632
14	17,598914	18,295681	18,655654	19,023588	19,399660	19,784054	20,578564
15	19,156881	19.971030	20,392742	20,824531	21,266645	21,719337	22,657492
16	20,761588	21,705016	22,194969	22,697512	23,212978	23,741707	24,840366
17	22,414435	23,499691	24,064781	24,645413	25,242029	25,855084	27,132385
18	24,116868	25,357180	26,004710	26,671229	27,357316	28,063562	29,539004
19	25,870374	27,279682	28,017387	28,778079	29,562501	30,371423	32,065954
20	27,676486	29,269471	30,105539	30,969202	31,861408	32,783137	34,719252
21	29,536780	31,328902	32,271996	33,247970	34,258018	35,303378	37,505214
22	31,452884	33,460414	34,519696	35,617889	36,756483	37,937030	40,430475
23	33,426470	35,666528	36,851685	38,082604	39,361134	40,689196	43,501999
24	35,459264	37,949857	39,271123	40,645908	42,076482	43,565210	46,727099
25	37,553042	40,313102	41,781290	43,311745	44,907233	46,570645	50,113454
26	39,709634	42,759060	44,385588	46,084214	47,858290	49,711324	53,669126
27	41,930923	45,290627	47,087548	48,967583	50,934767	52,993333	57,402583
28	44,218850	47,910799	49,890831	51,966286	54,141995	56,423033	61,322712
29	46,575416	50,622677	52,799237	55,084938	57,485530	60,007070	65,438848
30	49,002678	53,429471	55,816709	58,328335	60,971165	63,752388	69,760790
31	51,502759	56,334502	58,947335	61,701469	64,604939	67,666245	74,298829
32	54,077841	59,341210	62,195360	65,209527	68,393149	71,756226	79,063771
33	56,730177	62,453152	65,565186	68,857909	72,342358	76,030256	84,066959
34	59,462082	65,674013	69,061381	72,652225	76,459408	80,496618	89,320307
35	62,275944	69,007603	72,688682	76,598314	80,751433	85,163966	94,836323
36	65,174223	72,457869	76,452008	80,702246	85,225869	90,041344	100,628139
37	68,159449	76,028895	80,356458	84,970336	89,890468	95,138205	106,709546
38	71,234233	79,724906	84,407326	89,409150	94,753313	100,464424	113,095023
39	74,401260	83,550278	88,610100	94,025516	99,822829	106,030323	119,799774
40	77,663298	87,509537	92,970479	98,826536	105,107799	111,846688	126,839763
41	81,023196	91,607371	97,494372	103,819598	110,617381	117,924789	134,231751
42	84,483892	95,848629	102,187911	109,012382	116,361119	124,276404	141,993339
43	88,048409	100,238331	107,057458	114,412877	122,348967	130,913842	150,143006
44	91,719861	104,781673	112,109612	120,029392	128,591298	137,849965	158,700156
45	95,501457	109,484031	117,351223	125.870568	135,098928	145,098214	167,685164
46	99,396501	114,350973	122,789394	131,945390	141,883133	152,672633	177,119422
47	103,408396	119,388257	128,431496	138,263206	148,955666	160,587902	187,025393
48	107,540648	124,601846	134,285177	144,833734	156,328782	168,859357	197,426663
49	111,796867	129,997910	140,358371	151,667084	164,015255	177,503028	208,347996
50	116,180773	135,582837	146,659310	158,773767	172,028403	186,535665	219,815396

Sterbetafel der 23 deutschen

Alter	Anzahl der Lebenden	Anzahl der Sterbenden	Wahrscheinlichkeit des Lebens für ein Jahr	Wahrscheinlichkeit des Sterbens für ein Jahr	Verhältnis des Zinsfaktors zur Lebenswahrscheinlichkeit	Verhältnis der Sterbensw. zur Lebenswahrscheinlichkeit	Alter
x	l_x	d_x	p_x	q_x	$\frac{1,035}{p_x}$	$\frac{q_x}{p_x}$	x
17	102787	909	0,9911565	0.0088435	1,044235	0,0089224	17
18	101878	936	0,9908125	0,0091875	1,044597	0,0092727	18
19	100942	942	0,9906679	0,0093321	1,044750	0,0094200	19
20	100000	919	0,9908100	0,0091900	1,044600	0,0092752	20
21	99081	908	0,9908358	0,0091642	1,044573	0,0092490	21
22	98173	887	0,9909649	0,0090351	1,044437	0,0091174	22
23	97286	861	0,9911498	0,0088502	1,044242	0,0089292	23
24	96425	835	0,9913404	0,0086596	1,044041	0,0087352	24
25	95590	816	0,9914635	0,0085365	1,043911	0,0086100	25
26	94774	804	0,9915167	0,0084833	1,043855	0,0085559	26
27	93970	797	0,9915186	0,0084814	1,043853	0,0085540	27
28	93173	795	0,9914675	0,0085325	1,043907	0,0086059	28
29	92378	800	0,9913399	0,0086601	1,044042	0,0087357	29
30	91578	808	0,9911769	0,0088231	1,044213	0,0089016	30
31	90770	818	0,9909882	0,0090118	1,044412	0,0090937	31
32	89952	831	0,9907617	0,0092383	1,044651	0,0093244	32
33	89121	841	0,9905634	0,0094366	1,044860	0,0095265	33
34	88280	856	0,9903036	0,0096964	1,045134	0,0097914	34
35	87424	873	0,9900142	0,0099858	1,045440	0,0100865	35
36	86551	889	0,9897286	0,0102714	1,045741	0,0103780	36
37	85662	906	0,9894235	0,0105765	1,046064	0,0106895	37
38	84756	928	0,9890509	0,0109491	1,046458	0,0110703	38
39	83828	950	0,9886673	0,0113327	1,046864	0,0114626	39
40	82878	975	0,9882357	0,0117643	1,047321	0,0119043	40
41	81903	1006	0,9877172	0,0122828	1,047871	0,0124356	41
42	80897	1035	0,9872060	0,0127940	1,048413	0,0129599	42
43	79862	1063	0,9866895	0,0133105	1,048962	0,0134900	43
44	78799	1092	0,9861420	0,0138580	1,049545	0,0140528	44
45	77707	1117	0,9856255	0,0143745	1,050095	0,0145841	45
46	76590	1140	0,9851156	0,0148844	1,050638	0,0151093	46
47	75450	1169	0,9845063	0,0154937	1,051288	0,0157375	47
48	74281	1204	0,9837913	0,0162087	1,052052	0,0164758	48
49	73077	1246	0,9829495	0,0170505	1,052953	0,0173463	49
50	71831	1303	0,9818602	0,0181398	1,054122	0,0184749	50
51	70528	1362	0,9806885	0,0193115	1,055381	0,0196918	51
52	69166	1425	0,9793974	0,0206026	1,056772	0,0210360	52
53	67741	1490	0,9780045	0,0219955	1,058277	0,0224902	53
54	66251	1556	0,9765136	0,0234864	1,059893	0,0240513	54
55	64695	1621	0,9749440	0,0250560	1,061599	0,0257000	55

Gesellschaften (M. u. W. I.)

Alter	Anzahl der Lebenden	Anzahl der Sterbenden	Wahrscheinlichkeit des Lebens für ein Jahr	Wahrscheinlichkeit des Sterbens für ein Jahr	Verhältnis des Zinsfaktors zur Lebenswahrscheinlichkeit	Verhältnis der Sterbensw. zur Lebenswahrscheinlichkeit	Alter
x	l_x	d_x	p_x	q_x	$\frac{1,035}{p_x}$	$\frac{q_x}{p_x}$	x
56	63074	1691	0,9731902	0,0268098	1,063513	0,0275483	56
57	61383	1759	0,9713439	0,0286561	1,065534	0,0295015	57
58	59624	1832	0,9692741	0,0307259	1,067809	0,0316999	58
59	57792	1900	0,9671235	0,0328765	1,070184	0.0339941	59
60	55892	1976	0,9646461	0,0353539	1,072932	0,0366496	60
61	53916	2038	0,9622005	0,0377995	1,075659	0,0392845	61
62	51878	2097	0,9595782	0,0404218	1,078599	0,0421245	62
63	49781	2149	0,9568309	0,0431691	1,081696	0,0451167	63
64	47632	2197	0,9538755	0,0461245	1,085047	0,0483548	64
65	45435	2246	0,9505667	0,0494333	1,088824	0,0520040	65
66	43189	2302	0,9466994	0,0533006	1,093272	0,0563015	66
67	40887	2355	0,9424022	0,0575978	1,098257	0,0611180	67
68	38532	2399	0,9377401	0,0622599	1,103717	0,0663936	68
69	36133	2432	0,9326931	0,0673069	1,109690	0,0721640	69
70	33701	2452	0,9272425	0,0727575	1,116213	0,0784665	70
71	31249	2455	0,9214375	0,0785625	1,123245	0,0852608	71
72	28794	2436	0,9153990	0 0846010	1,130655	0,0924198	72
73	26358	2406	0,9087184	0,0912816	1,138967	0,1004509	73
74	23952	2360	0,9014696	0,0985304	1,148125	0,1092997	74
75	21592	2299	0,8935254	0,1064746	1,158333	0,1191624	75
76	19293	2210	0,8854507	0,1145493	1,168896	0.1293684	76
77	17083	2103	0,8768952	0,1231048	1,180301	0,1403872	77
78	14980	1982	0,8676903	0,1323097	1,192822	0,1524850	78
79	12998	1848	0,8578243	0,1421757	1,206541	0,1657399	79
80	11150	1730	0,8448430	0,1551570	1,225080	0,1836518	80
81	9420	1599	0,8302548	0,1697452	1,246605	0,2044496	81
82	7821	1443	0,8154967	0,1845033	1,269165	0,2262465	82
83	6378	1264	0,8018188	0,1981812	1,290815	0,2471646	83
84	5114	1080	0,7888150	0,2111850	1,312095	0,2677243	84
85	4034	896	0,7778880	0,2221120	1,330526	0,2855322	85
86	3138	715	0,7721479	0,2278521	1,340417	0,2950887	86
87	2423	566	0,7664053	0,2335947	1,350460	0,3047927	87
88	1857	442	0,7619817	0,2380183	1,358300	0,3123675	88
89	1415	344	0,7568905	0,2431095	1,367437	0,3211951	89

Die Tafel schließt mit dem 90. Altersjahre.

Sterbetafel der 23 deutschen Gesellschaften

Alter	Um die Anzahl der Altersjahre diskontierte Zahl der Lebenden	Reciproker Wert von D_x, multipliziert mit 10 000	Summe der um die Anzahl der Altersjahre diskontierten Zahlen der Lebenden	Doppelsumme der um die Anzahl der Altersjahre diskontierten Zahlen der Lebenden	Summe der um 1 Jahr mehr als die Anzahl der Altersjahre diskontierten Zahlen der Gestorbenen	Doppelsumme der um 1 Jahr mehr als die Anzahl der Altersjahre diskontierten Zahlen der Gestorbenen	Alter
x	D_x	$\frac{10000}{D_x}$	N_x	$\sum N_x$	M_x	R_x	x
17	57273,31	0,1746014	1195728,59	20965363,99	16838,0363	486754,9256	17
18	54847,15	0,1823249	1138455,28	19769635,40	16348,6661	469916,8893	18
19	52505,56	0,1904560	1083608,13	18631180,12	15861,8004	453568,2232	19
20	50256,59	0,1989789	1031102,57	17547571,99	15388,3833	437706,4228	20
21	48110,85	0,2078533	980845,98	16516469,42	14942,1436	422318,0395	21
22	46057,92	0,2171173	932735,13	15535623,44	14516,1549	407375,8959	22
23	44098,34	0,2267659	886677,21	14602888,31	14114,0906	392859,7410	23
24	42230,01	0,2367984	842578,87	13716211,10	13737,0095	378745,6504	24
25	40448,62	0,2472272	800348,86	12873632,23	13383,6818	365008,6409	25
26	38747,18	0,2580833	759900,24	12073283,37	13050,0702	351624,9591	26
27	37119,30	0,2694016	721153,06	11313383,13	12732,4804	338574,8889	27
28	35559,88	0,2812158	684033,76	10592230,07	12428,3019	325842,4085	28
29	34064,22	0,2935632	648473,88	9908196,31	12135,1471	313414,1066	29
30	32627,26	0,3064922	614409,66	9259722,43	11850,1244	301278,9595	30
31	31245,79	0,3200431	581782,40	8645312,77	11571,9862	289428,8351	31
32	29917,11	0,3342569	550536,61	8063530,37	11299,9278	277856,8489	32
33	28638,38	0,3491818	520619,50	7512993,76	11032,8920	266556,9211	33
34	27408,83	0,3648459	491981,12	6992374,26	10771,7816	255524,0291	34
35	26225,18	0,3813129	464572,29	6500393,14	10515,0014	244752,2475	35
36	25085,31	0,3986397	438347,11	6035820,85	10261,9775	234237,2461	36
37	23988,07	0,4168739	413261,80	5597473,74	10013,0294	223975,2686	37
38	22931,74	0,4360768	389273,73	5184211,94	9767,9003	213962,2392	38
39	21913,69	0,4563357	366341,99	4794938,21	9525,3095	204194,3389	39
40	20932,70	0,4777215	344428.30	4428596,22	9285,3656	194669,0294	40
41	19986,90	0,5003277	323495,60	4084167,92	9047,4350	185383,6638	41
42	19073,82	0,5242788	303508,70	3760672,32	8810,2412	176336,2288	42
43	18193,03	0,5496611	284434,88	3457163,62	8574,4621	167525,9876	43
44	17343,84	0,5765736	266241,85	3172728,74	8340,4934	158951,5255	44
45	16525,11	0,6051397	248898,01	2906486,89	8108,2696	150611,0321	45
46	15736,79	0,6354536	232372,90	2657588,88	7878.7620	142502,7625	46
47	14978,31	0,6676321	216636,11	2425215,98	7652,4495	134624,0005	47
48	14247,58	0,7018736	201657,80	2208579,87	7428,2277	126971,5510	48
49	13542,64	0,7384085	187410,22	2006922,07	7205,1022	119543,3233	49
50	12861,58	0,7775095	173867,58	1819511,85	6982,0017	112338,2211	50
51	12201,23	0,8195895	161006,00	1645644,27	6756,5848	105356,2194	51
52	11560,97	0,8649793	148804,77	1484638,27	6528,9290	98599,6346	52
53	10939,89	0,9140860	137273,80	1335833,50	6298,7973	92070,7056	53
54	10337,45	0,9673566	126303,91	1198589,70	6066,3056	85771,9083	54
55	9753,295	1,025295	115966,463	1072285,792	5831,7260	79705,6027	55

Diskont: 3½%.

Alter	Um die Anzahl der Altersjahre diskontierte Zahl der Lebenden	Reciproker Wert von D_x, multipliziert mit 10 000	Summe der um die Anzahl der Altersjahre diskontierten Zahlen der Lebenden	Doppelsumme	Summe der um 1 Jahr mehr als die Anzahl der Altersjahre diskontierten Zahlen der Gestorbenen	Doppelsumme	Alter
x	D_x	$\frac{10000}{D_x}$	N_x	$\sum N_x$	M_x	R_x	x
56	9187,359	1,088452	106213,168	956319,329	5595,6111	73873,8767	56
57	8638,694	1,157582	97025,809	850106,161	5357,6294	68278,2656	57
58	8107,385	1,233443	88387,115	753080,352	5118,4490	62920,6362	58
59	7592,540	1,317082	80279,730	664693,237	4877,7663	57802,1872	59
60	7094,612	1,409520	72687,190	584413,507	4636,5911	52924,4209	60
61	6612,355	1,512320	65592,578	511726,317	4394,2509	48287,8298	61
62	6147,258	1,626742	58980,223	446133,739	4152,7591	43893,5789	62
63	5699,302	1,754601	52832,965	387153,516	3912,6788	39740,8198	63
64	5268,857	1,897945	47133,663	334320,551	3674,9652	35828,1410	64
65	4855,879	2,059359	41864,806	287186,888	3440,1602	32153,1758	65
66	4459,744	2,242281	37008,927	245322,082	3208,2358	28713,0156	66
67	4079,263	2,451423	32549,183	208313,155	2978,5671	25504,7798	67
68	3714,308	2,692292	28469,920	175763,972	2751,5559	22526,2127	68
69	3365,269	2,971531	24755,612	147294,052	2528,1236	19774,6568	69
70	3032,622	3,297477	21390,343	122538,440	2309,2774	17246,5332	70
71	2716,885	3,680686	18357,721	101148,097	2096,8655	14937,2558	71
72	2418,782	4,134312	15640,836	82790,376	1889,8655	12841,1629	72
73	2139,276	4,674479	13222,054	67149,540	1692,1541	10951,2974	73
74	1878,261	5,324074	11082,778	53927,486	1503,4811	9259,1433	74
75	1635,937	6,112705	9204,517	42844,708	1324,6736	7755,6622	75
76	1412,321	7,080543	7568,580	33640,191	1156,3781	6430,9886	76
77	1208,252	8,276419	6156,259	26071,611	1000,0686	5274,6105	77
78	1023,681	9,768668	4948,007	19915,352	856,3569	4274,5419	78
79	858,2007	11,65229	3924,3268	14967,3457	725,4942	3418,1850	79
80	711,2908	14,05895	3066,1261	11043,0189	607,6049	2692,6908	80
81	580,6074	17,22334	2354,8353	7976,8928	500,97537	2085,08591	81
82	465,7507	21,47071	1774,2279	5622,0575	405,75284	1584,11054	82
83	366,9742	27,24987	1308,4772	3847,8296	322,72623	1178,35770	83
84	284,2965	35,17454	941,5030	2539,3524	252,45819	855,63147	84
85	216,6738	46,15233	657,2065	1597,8494	194,44934	603,17328	85
86	162,8481	61,40692	440,5327	940,6429	147,95097	408,72394	86
87	121,4907	82,31083	277,6846	500,1102	112,10044	260,77297	87
88	89,96237	111,15759	156,19399	222,42561	84,68057	148,67253	88
89	66,23162	150,98528	66,23162	66,23162	63,99196	63,99196	89

Die Tafel schließt mit dem 90. Altersjahre.

Barwerte der abgekürzten vorschüssigen Leibrenten.

	70.	65.	60.	55.	50.	45.	40.	35.	
20	20,09114	19,68374	19,07044	18,20928	17,05717	15,56422	13,66337	11,27276	20
21	19,94260	19,51703	18,87638	17,97681	16,77331	15,21378	13,22815	10,73092	
22	19,78693	19,34239	18,67318	17,73351	16,47637	14,84733	12,77319	10,16465	
23	19,62176	19,15746	18,45852	17,47709	16,16409	14,46266	12,29636	9,571900	
24	19,44561	18,96078	18,23091	17,20607	15,83498	14,05827	11,79613	8,951135	
25	19,25797	18,75179	17,98978	16.91979	15,48832	13,63337	11,27160	8,301310	25
26	19,05971	18,53130	17,73582	16,61886	15,12452	13,18811	10,72264	7,621921	
27	18,85172	18,30013	17,46977	16,30382	14,74396	12,72263	10,14903	6,912327	
28	18,63458	18,05881	17,19203	15,97495	14,34668	12,23670	9,550242	6,171603	
29	18,40886	17,80781	16,90298	15,63246	13,93269	11,73008	8,925659	5,398674	
30	18,17558	17,54805	16,60337	15,27690	13,50227	11,20265	8,274718	4,592398	30
31	17,93496	17,27969	16,29324	14,90812	13,05503	10,65374	7,596354	3,751229	
32	17,68708	17,00271	15,97245	14.52581	12,59042	10,08248	6,889312	2,873417	
33	17,43217	16,71724	15,64098	14,12975	12,10795	9,488020	6,152276	1,957066	
34	17,16931	16,42231	15,29777	13,71874	11,60624	8,868788	5,383404	1,000000	
35	16,89910	16,11838	14,94308	13,29279	11,08495	8,223939	4,581245		35
36	16,62155	15,80536	14,57666	12,85137	10,54320	7,552193	3,743977		
37	16,33610	15,48257	14,19767	12,39347	9,979720	6,851897	2,869489		
38	16.04254	15,14970	13,80560	11,91830	9,393362	6,121459	1,955605		
39	15,74138	14,80705	13,40052	11,42553	8,783295	5,359388	1,000000		
40	15,43222	14,45411	12,98166	10,91411	8,148052	4,563687			40
41	15,11516	14,09077	12,54864	10,38326	7,486304	3,732324			
42	14,79087	13,71743	12,10148	9,832442	6,796809	2,863123			
43	14,45854	13,33313	11,63895	9,260054	6,077454	1,953323			
44	14,11749	12,93699	11,15985	8,664482	5,326057	1,000000			
45	13,76739	12,52840	10,66322	8,044216	4,540389				45
46	13,40696	12,10591	10,14729	7,397089	3,717742				
47	13,03523	11,66829	9,610492	6,721029	2,855364				
48	12,65250	11,21545	9,052107	6,014449	1,950522				
49	12.25905	10,74720	8,471246	5,275468	1,000000				
50	11,85525	10,26334	7,866871	4,501867					50
51	11,44275	9,764687	7,238517	3,691393					
52	11,02108	9,250085	6,584013	2,840446					
53	10,59000	8,718460	5,901029	1,944932					
54	10,14888	8,168273	5,186649	1,000000					
55	9,696842	7,597605	4,437402						55
56	9,232557	7,004010	3,649142						
57	8,755425	6,385338	2,817395						
58	8,263670	5,738261	1,936496						
59	7,756215	5,059560	1,000000						
60	7,230393	4,344477							60
61	6,684792	3,588398							
62	6,114904	2,784237							
63	5,516926	1,924474							
64	4,885940	1,000000							
65	4,216427								65
66	3,502125								
67	2,735504								

Tafel der 23 deutschen Gesellschaften. [M. und W. I.], $3^1/_2$ %.

Kapitalbarwerte der gemischten Versicherung auf den Todes- und den Lebensfall.

	70.	65.	60.	55.	50.	45.	40.	35.
22	320,5893	334,3661	355,1059	384,2271	423,1874	473,6737	537,9537	618,7955
20	325,6124	340,0036	361,6682	392,0884	432,7865	485,5242	552,6712	637,1185
21	330,8766	345,9094	368,5397	400,3161	442,8280	497,9163	568.0563	656,2678
22	336,4622	352,1632	375,7989	408,9872	453,3882	510,9244	584,1810	676,3125
23	342,4189	358,8142	383,4958	418,1521	464,5176	524,5995	601,0970	697,3046
24	348,7641	365,8814	391,6499	427,8331	476,2403	538,9682	618,8347	719,2793
25	355,4687	373,3375	400,2379	438,0095	488,5427	554,0252	637,3985	742,2538
27	362,5022	381,1549	409,2348	448,6630	501,4119	569,7661	656,7960	766,2498
28	369,8450	389,3154	418,6270	459,7843	514,8465	586,1985	677,0449	791,2984
29	377,4781	397,8035	428,4016	471,3660	528,8462	603,3306	698,1661	817,4361
30	385,3668	406,5876	438,5334	483,3898	543,4014	621,1663	720,1786	844,7015
31	393,5036	415,6626	449,0208	495,8606	558,5255	639,7285	743,1184	873,1468
32	401,8862	425,0290	459,8687	508,7890	574,2370	659,0465	767,0281	902,8313
33	410,5062	434,6827	471,0779	522,1823	590,5523	679,1491	791,9520	933,8190
34	419,3953	444,6560	482,6840	536,0812	607,5184	700,0893	817,9525	966,1836
35	428,5328	454,9339	494,6784	550,4853	625,1466	721,8957	845,0787	
36	437,9185	465,5192	507,0694	565,4126	643,4666	744,6118	873,3921	
37	447,5714	476,4348	519,8855	580,8971	662,5215	768,2933	902,9641	
38	457,4986	487,6913	533,1438	596,9656	682.3501	792,9941	933.8684	
39	467,6827	499,2785	546,8423	613,6293	702,9803	818,7646	966,1836	
40	478,1374	511,2135	561,0066	630,9237	724,4620	845,6724		
41	488,8592	523,5004	575,6498	648,8753	746,8399	873,7861		
42	499,8257	536,1254	590,7711	667,5019	770,1562	903,1794		
43	511,0638	549,1211	606,4122	686,8580	794,4822	933,9456		
44	522,5969	562,5171	622,6137	706,9982	819,8918	966,1836		
45	534,4360	576,3342	639,4079	727,9733	846,4603			
46	546,6244	590,6213	656,8549	749,8569	874,2792			
47	559,1951	605,4201	675,0075	772,7188	903,4418			
48	572,1376	620,7335	693,8901	796,6128	934,0403			
49	585,4427	636,5680	713,5327	821,6025	966,1836			
50	599,0978	652,9305	733,9705	847,7629				
51	613,0470	669,7932	755,2192	875,1703				
52	627,3064	687,1951	777,3522	903,9463				
53	641,8840	705,1728	800,4483	934,2293				
54	656,8011	723,7782	824,6060	966,1836				
55	672,0874	743,0762	849,9429					
56	687,7879	763,1494	876,5990					
57	703,9228	784,0707	904,7258					
58	720,5522	805,9525	934,5146					
59	737,7125	828,9038	966,1836					
60	755,4939	853,0853						
61	773,9442	878,6532						
62	793,2157	905,8471						
63	813,4373	934,9212						
64	834,7750	966,1836						
65	857,4155							
66	881,5706							
67	907,4950							
68	935,5449							
69	966,1836							